



С. П. Фиников

Создатель
современной
проективно-
дифференциальной
геометрии

Основатель школы
советских
геометров

ТЕОРИЯ
ПОВЕРХНОСТЕЙ



URSS

С. П. Фиников

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Издание четвертое,
исправленное



URSS
МОСКВА

ББК 22.151.4 22.1я73

Фиников Сергей Павлович

Теория поверхностей. Изд. 4-е, испр. — М.: ЛЕНАНД, 2016. — 304 с.

Вниманию читателей предлагается книга известного отечественного математика С. П. Финикова (1883–1964), посвященная теории поверхности — наиболее простого и осязаемого объекта дифференциальной геометрии. Первая глава отводится теории кривых; далее с самыми элементарными сведениями разбирается целый ряд наиболее известных поверхностей и ставятся основные задачи изгибания поверхности и конформного отображения; даются базовые уравнения теории поверхности и их приложение к основным задачам; в двух последних главах намечена теория конгруэнций и триортогональных систем. В конце каждой главы приведены задачи и упражнения, а в конце всей книги — таблица основных формул.

Рекомендуется математикам — научным работникам, преподавателям, аспирантам и студентам математических вузов.

ООО «ЛЕНАНД», 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.
Формат 60×90/16. Печ. л. 19. Тираж 700 экз. Зак. № 547.

Отпечатано в ОАО «Областная типография «Печатный двор».
432049, г. Ульяновск, ул. Пушкарёва, 27.

ISBN 978–5–9710–2292–3

© С. П. Фиников, 1934, 2015

© ЛЕНАНД, оформление, 2015

8979 ID 198751



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельцев.

Содержание

Предисловие	8
Глава 1. Кривые в пространстве	11
<i>А. Элементы первого порядка</i>	11
1. Определение кривой	11
2. Касательная	12
3. Длина дуги	13
<i>В. Элементы второго порядка</i>	15
4. Главная нормаль	15
5. Сопровождающий трехгранник Френе	16
6. Соприкасающаяся плоскость	17
<i>С. Элементы третьего порядка</i>	18
7. Движение трехгранника Френе	18
8. Характеристика движения трехгранника Френе	20
9. Кривизна и кручение	21
10. Кривые Бертрана	23
11. Натуральные уравнения кривой	26
12. Винтовые линии	28
<i>Д. Развертывающиеся поверхности, связанные с кривой</i>	30
13. Огибающая семейства поверхностей	30
14. Развертывающаяся поверхность	32
15. Полярная поверхность	33
16. Эволюты кривой	34
17. Спрямяющая поверхность	36
<i>Е. Соприкасающиеся поверхности</i>	38
18. Соприкасающаяся плоскость	38
19. Соприкасающаяся сфера	39
20. Формула для вычисления кручения кривой	41
<i>Упражнения</i>	43

Глава 2. Линейный элемент поверхности	49
<i>А. Элементы первого порядка на поверхности</i>	49
1. Криволинейные координаты на поверхности	49
2. Касательная плоскость	51
3. Линейный элемент поверхности	52
4. Угол двух кривых на поверхности	53
5. Площадь поверхности	54
<i>В. Примеры поверхностей</i>	55
6. Плоскость и сфера	55
7. Поверхность вращения	57
8. Катеноид	58
9. Псевдосфера	59
10. Линейчатая поверхность	61
<i>С. Налагающиеся поверхности</i>	64
11. Изгибание поверхностей	64
12. Развертывающаяся поверхность	65
13. Изгибание поверхностей вращения	66
14. Изгибание шара	68
<i>Д. Конформное отображение</i>	69
15. Конформное отображение	69
16. Конформное отображение поверхности вращения на плоскость	71
17. Изотермическая система	72
18. Линии нулевой длины	73
<i>Упражнения</i>	75
 Глава 3. Вторая квадратичная форма	 81
<i>А. Нормальная кривизна кривой на поверхности</i>	81
1. Кривизна кривой на поверхности	81
2. Нормальная кривизна кривой	83
3. Индикатриса Дюпена	84
4. Формула Эйлера	87
5. Главные радиусы кривизны	88
<i>В. Трехгранник Дарбу</i>	90
6. Трехгранник Дарбу	90
7. Кинематическое значение квадратичных форм Гаусса	92

8. Сферическое изображение поверхности	94
9. Кривизна поверхности	95
C. <i>Линии кривизны</i>	97
10. Линии кривизны	97
11. Качение трехгранника Дарбу по поверхности центров	100
D. <i>Сопряженные линии</i>	102
12. Сопряженные направления	102
13. Поверхность, отнесенная к сопряженной системе . . .	104
E. <i>Асимптотические линии</i>	105
14. Асимптотические линии	105
15. Асимптотические касательные к поверхности	107
16. Поверхность, отнесенная к асимптотическим линиям	109
17. Формулы Лельёвра	111
18. Теорема Эннепера	113
F. <i>Добавление</i>	114
19. Проективное преобразование пространства	114
20. Квадратичные формы поверхности	115
<i>Упражнения</i>	117
Глава 4. Основные уравнения теории поверхности	123
A. <i>Уравнения Гаусса—Кодацци</i>	123
1. Основные уравнения в форме Дарбу	123
2. Единственность поверхности с заданными инвариантами	125
3. Определение конечных уравнений поверхности . . .	127
4. Определение трехгранника Дарбу по коэффициентам двух квадратичных форм	128
5. Уравнения Кодацци	129
B. <i>Проблема изгибания поверхности</i>	132
6. Две задачи изгибания	132
7. Теорема Гаусса	133
8. Первая задача изгибания	134
9. Поверхности постоянной кривизны	136
10. Изгибание с одной твердой линией	139

11. Изгибание с сохранением асимптотических линий одного семейства	141
12. Изгибание с сохранением сопряженной системы	142
<i>С. Сферическое изображение поверхности</i>	<i>145</i>
13. Сферическое изображение и его линейный элемент	145
14. Третья квадратичная форма Гаусса	147
15. Поверхность с заданным сферическим изображением сопряженной системы	149
16. Сферическое изображение асимптотических линий	151
17. Примеры	152
<i>Упражнения</i>	<i>155</i>
Глава 5. Геодезические линии. Геометрия на поверхности	161
1. Геодезические линии как линии постоянного направления на поверхности	161
2. Уравнение геодезической линии	162
3. Геодезическая линия как кратчайшее расстояние	164
4. Теорема Дарбу	166
5. Геодезические линии на поверхности вращения	168
6. Развертывание линии на плоскость	170
7. Геодезическое кручение	174
8. Кривизна геодезического треугольника	176
9. Геодезические круги Дарбу	179
10. Геодезические эллипсы и гиперболы	180
11. Теорема Якоби	181
12. Поверхности Лиувилля	184
13. Геометрия на псевдосфере	188
<i>Упражнения</i>	<i>193</i>
Глава 6. Минимальные поверхности	198
1. Поверхности с наименьшей площадью	198
2. Основные свойства минимальной поверхности	200
3. Формулы Монжа	201
4. Формулы Вейерштрасса	203
5. Односторонние минимальные поверхности	206

6. Изгибание минимальных поверхностей	209
7. Формулы Шварца	211
8. Следствие из формул Шварца	214
9. Частные случаи	215
<i>Упражнения</i>	220
Глава 7. Теория конгруэнции	224
1. Линейчатая геометрия	224
2. Конгруэнция кривых	224
3. Конгруэнция прямых	228
4. Фокусы луча	230
5. Граничные точки луча	233
6. Изотропная конгруэнция	236
7. Нормальная конгруэнция	240
8. Конгруэнции W	243
9. Поверхности Вейнгартена	246
10. Псевдосферическая конгруэнция	250
11. Основные формы Санниа	252
<i>Упражнения</i>	254
Глава 8. Триортогональная система поверхностей	259
1. Криволинейные координаты в пространстве	259
2. Теорема Дюпена	261
3. Уравнение Ламе	263
4. Теорема Лиувилля о конформном отображении пространства	265
5. Теорема Дарбу	267
6. Уравнения для семейства поверхностей Ламе	270
7. Софокусные поверхности второго порядка	272
8. Изотермическая система	275
<i>Упражнения</i>	276
Приложение	279
<i>Основные формулы</i>	280
<i>Фотографии поверхностей</i>	285
Предметный указатель	295