

Физико·

Математическое  
Наследие

Г. В. КОЛОСОВ

**ПРИМЕНЕНИЕ  
КОМПЛЕКСНЫХ ДИАГРАММ  
И  
ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ  
КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ  
К ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ**



Физика

Механика



Г. В. Колосов

**ПРИМЕНЕНИЕ  
КОМПЛЕКСНЫХ  
ДИАГРАММ  
И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ  
КОМПЛЕКСНОЙ  
ПЕРЕМЕННОЙ  
К ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Издание второе



URSS

МОСКВА

ББК 22.1п 22.161 22.21 22.251

**Колосов Гурий Васильевич**

**Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости.** Изд. 2-е. — М.: ЛЕНАНД, 2016. — 232 с.  
(Физико-математическое наследие: физика (механика).)

Книга рекомендуется математикам, механикам, физикам, инженерам, преподавателям, аспирантам и студентам естественных и технических факультетов высших учебных заведений.

Формат 60×90/16. Печ. л. 14,5. Зак. № АХ-363.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

**ISBN 978-5-9710-3090-4**

© ЛЕНАНД, оформление, 2016

19449 ID 210927



9 785971 030904

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: <a href="mailto:URSS@URSS.ru">URSS@URSS.ru</a>
	Каталог изданий в Интернете: <a href="http://URSS.ru">http://URSS.ru</a>
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45
	URSS

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие . . . . .	3
-----------------------	---

### Глава I

#### Введение

1. Комплексные диаграммы при решении технических и математических вопросов . . . . .	7
2. Графические построения, основанные на комплексном преобразовании . . . . .	9
3. Обобщение предыдущих формул на целый класс случаев . . . . .	11
4. Примеры применения комплексных диаграмм . . . . .	15
5. Геометрическая интерпретация напряжений в сплошном теле и их нормальных и тангенциальных составляющих . . . . .	17
6. Растяжения, сжатия и сдвига в бесконечно мало деформируемом теле . . . . .	23
7. Преобразование элементов деформации в криволинейные координаты . . . . .	26
8. Применение комплексного преобразования к выводу основных уравнений равновесия сплошного тела в криволинейных координатах . . . . .	33
9. Элементарный вывод основных уравнений теории упругости изотропного тела . . . . .	35
10. О коэффициентах упругости и соотношениях между ними . . . . .	39
11. Уравнения Бельтрами-Митчелла и определение перемещений . . . . .	42
12. О приемах нахождения общих решений теории упругости . . . . .	44

### Глава II

#### Плоская задача теории упругости

1. Понятие о плоской задаче теории упругости . . . . .	52
2. Интегрирование уравнений плоской задачи . . . . .	54
3. Функция Эри . . . . .	56
4. Примеры изучения напряжений при помощи функций Эри . . . . .	58
5. Способ функций комплексной переменной для получения решений плоской задачи (без внешних сил) . . . . .	60
6. Об определении перемещений по напряжениям и об определении уравнений кривых, связанных с напряжениями; закон взаимности . . . . .	69
7. О применении конформных отображений к плоской задаче теории упругости . . . . .	72

Стр.

8. Распространение решения на случай приложенных внешних сил . . . . .	75
9. Примеры распределения напряжений при действии отдельных сил или групп сил, приложенных внутри тела в его плоскости . . . . .	78
10. Плоская задача по способу аналогичному методу Галеркина для задачи трех измерений . . . . .	81
11. Четвертый способ интегрирования уравнений плоской задачи	
12. Применение теории функций комплексной переменной к получению решений плоской задачи в прямолинейных прямоугольных координатах . . . . .	86
13. Плоская задача в криволинейных координатах . . . . .	89
14. Полярные координаты на плоскости . . . . .	92
15. О функциях аналогичных функции Эри . . . . .	94

## Глава III

**О способах решения плоской задачи теории упругости при заданных напряжениях на контуре (границе тела)**

1. Общие замечания . . . . .	98
2. Решение плоской задачи теории упругости для прямолинейного контура в определенных интегралах . . . . .	99
3. Примеры . . . . .	102
4. Об интегралах аналогичных интегралу Коши и интегралу Шварца . . . . .	107
5. Решение плоской задачи теории упругости для безграничной прямой при помощи интегралов Шварца . . . . .	110
6. Решение плоской задачи теории упругости для круга по методу комплексного уравнивания . . . . .	111
7. Примеры решения плоской задачи для круга в определенных интегралах . . . . .	116
8. Решение плоской задачи для окружности при помощи интеграла Шварца . . . . .	120
9. Решение плоской задачи для кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями . . . . .	122
10. Формула аналогичная формуле Дини в плоской задаче теории упругости для круга . . . . .	125
11. Простейшие задачи об определении напряжения при круговом контуре. Определение напряжений в однородной плоской растянутой среде, ослабленной круговым отверстием. Формулы Кирша . . . . .	126
12. Решение предыдущей задачи при условии существования предельного круга концентрического отверстия, за пределами которого влияние отверстия незаметно . . . . .	130
13. Примеры . . . . .	137
14. Решение плоской задачи для криволинейного контура . . . . .	
15. Примеры распределения напряжений для криволинейного контура . . . . .	143
16. Плоская задача в изосоординатах, но не для изоконтура . . . . .	150

17. Новый способ интегрирования бигармонического уравнения в связи с введением принципа комплексного уравновешивания . . . . .	152
18. Решение плоской задачи теории упругости для какого угодно криволинейного контура и в частности для алгебраического . . . . .	153
19. Примеры . . . . .	157

## Глава IV

**Комплексное преобразование как прием нахождения решений общей задачи теории упругости**

1. Общая задача теории упругости . . . . .	163
2. Простейшие примеры отыскания решения „полуобратным методом“ . . . . .	167
3. Задача Клебша и ее обобщения . . . . .	171
4. Задача Сен-Венана . . . . .	173
5. Растяжение и кручение . . . . .	179
6. Решение задачи о кручении для призмы с основанием в виде прямоугольника . . . . .	182
7. Более сложные случаи вопроса о кручении . . . . .	186
8. Изгиб . . . . .	187
9. Задача Сен-Венана для кривого бруса . . . . .	191
10. Об экспериментальном определении напряжения по краям кругового эллиптического и других отверстий . . . . .	198
11. Добавление . . . . .	199