



Издательский Дом
ИНТЕЛЛЕКТ

К.В. БРУШЛИНСКИЙ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ
ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ**

К.В. БРУШЛИНСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ



ДОЛГОПРУДНЫЙ
2017

К.В. Брушлинский

Математические основы вычислительной механики жидкости, газа и плазмы: Учебное пособие / К.В. Брушлинский — Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2017. — 272 с.

ISBN 978-5-91559-224-6

Вычислительная механика — современная область науки, сопровождающая создание и развитие новой техники. Она дополняет и облегчает возможности все более сложных теоретических исследований и позволяет сэкономить на все более дорогостоящих экспериментах. Ее содержанием являются математические модели физических процессов и большой объем громоздких расчетов с применением быстро совершенствующейся вычислительной техники. Эффективность того и другого требует грамотного проникновения в математическую природу поставленных задач и применяемых для их решения численных методов.

В учебном пособии изложены, с одной стороны, математические основы механики жидкости, газа и плазмы, с другой — некоторые теоретические вопросы современной вычислительной математики; тем самым обращается внимание читателя на единство разных на первый взгляд разделов науки. Эти вопросы иллюстрируются примерами решения конкретных типов задач.

Книга рассчитана на студентов старших курсов, аспирантов, а также научных работников и преподавателей, интересующихся математическим моделированием в современных задачах механики сплошных сред.

ISBN 978-5-91559-224-6

© 2016, К.В. Брушлинский
© 2017, ООО «Издательский Дом
«Интеллект», оригинал-макет,
оформление

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	7
Глава 1. Математический аппарат газодинамики	13
§ 1.1. Уравнения газодинамики	13
1.1.1. Законы сохранения — физический смысл уравнений	13
1.1.2. Сведения из термодинамики. Уравнение состояния	16
1.1.3. Уравнения газодинамики идеального газа. Консервативная и простейшая формы	18
1.1.4. Уравнения акустики. Волновое уравнение. Линейное уравнение переноса	20
§ 1.2. Теория характеристик систем квазилинейных уравнений	23
1.2.1. Характеристики систем уравнений первого порядка	23
1.2.2. Гиперболичность и эволюционность	25
1.2.3. Соотношения на характеристиках	26
1.2.4. Характеристики систем многомерных уравнений	28
1.2.5. Характеристики системы уравнений газодинамики	30
1.2.6. Характеристики и постановки задач с уравнениями газодинамики	33
1.2.7. Двумерные стационарные течения газа	35
§ 1.3. Квазидномерное приближение	37
1.3.1. Модель течений газа в узких трубках	37
1.3.2. Стационарные течения. Сопло Лаваля	42
§ 1.4. Теория разрывных решений	46
1.4.1. Образование разрывов в решениях одного квазилинейного уравнения	46
1.4.2. Обобщенные решения систем уравнений	51
1.4.3. Разрывы в решениях уравнений газодинамики	52
1.4.4. Распад произвольного разрыва	56
§ 1.5. Модели несжимаемой жидкости	61
1.5.1. Уравнения гидродинамики и газодинамики	61
1.5.2. Теория «мелкой воды»	63

§ 1.6. Диссипативные процессы в газах	66
1.6.1. Уравнения газодинамики с вязкостью и теплопроводностью	66
1.6.2. Эволюционность уравнений	68
1.6.3. Гладкость решений	69
1.6.4. Искусственная вязкость Неймана–Рихтмайера	72
1.6.5. Пограничные слои	76
Глава 2. Автомодельные задачи математической физики	80
§ 2.1. Методы подобия. Автомодельность	80
§ 2.2. Задача о сферическом поршне	81
§ 2.3. Задача о сильном взрыве	87
§ 2.4. Задача о распространении тепла от точечного источника	91
§ 2.5. Определение показателей автомодельности.	94
§ 2.6. Задача о сходящейся сферической ударной волне	96
§ 2.7. Задача о схлопывании сферической полости.	106
Глава 3. Магнитогазодинамические модели плазмы	115
§ 3.1. Уравнения магнитной газодинамики	115
3.1.1. Законы сохранения. Консервативная форма уравнений.	115
3.1.2. Неконсервативные формы уравнений	118
§ 3.2. Гиперболичность уравнений МГД, характеристики, соотношения на них	119
§ 3.3. Разрывы в решениях уравнений МГД	125
§ 3.4. Симметрия в задачах магнитной газодинамики. Типичные классы двумерных МГД-течений	129
3.4.1. Примеры симметрии	129
3.4.2. Двумерные МГД-течения в поперечном магнитном поле	129
3.4.3. Двумерные МГД-течения в плоскости магнитного поля	131
3.4.4. Двумерные МГД-задачи с проводниками, погруженными в плазму	133
3.4.5. Двумерные МГД-задачи с произвольно ориентированными скоростью и магнитным полем	134
§ 3.5. Квазиодномерное приближение в магнитной газодинамике	134
3.5.1. Основные уравнения	134
3.5.2. Стационарные течения. Первые интегралы. МГД-сопло Лаваля с поперечным магнитным полем	140
3.5.3. МГД-течения в присутствии продольного магнитного поля	142
§ 3.6. Диссипативные процессы в магнитной газодинамике	150
§ 3.7. Математические модели плазмостатики	152
3.7.1. Равновесные конфигурации плазмы в магнитных ловушках. Симметрия. Уравнение Грэда–Шафранова	152
3.7.2. Пример расчета равновесных конфигураций	157

§ 3.8. О существовании, единственности и устойчивости решения задач в математических моделях взаимодействия реакции и диффузии	160
§ 3.9. Математические вопросы теории МГД-устойчивости	163
3.9.1. Линейная теория устойчивости равновесия плазмы в магнитном поле	165
3.9.2. Схема исследования устойчивости конфигураций в плазменном цилиндре. Z-пинч	168
3.9.3. Об устойчивости конфигураций в цилиндре с продольным магнитным полем	170
§ 3.10. Связь между диффузионной и МГД-проявлениями неустойчивости	175
Глава 4. О численном решении задач	180
§ 4.1. Некоторые общие вопросы	180
4.1.1. О постановке задач и системах координат	180
4.1.2. Единицы измерения. Безразмерные уравнения и параметры	181
§ 4.2. Разностные схемы. Исчисление конечных разностей	185
§ 4.3. Примеры разностных схем	188
4.3.1. Расщепление по физическим процессам	188
4.3.2. Примеры разностных схем для гиперболических уравнений и систем	189
4.3.3. Примеры разностных схем для параболических уравнений	192
§ 4.4. Основные положения теории разностных схем	193
4.4.1. Цели и задачи теории	193
4.4.2. Аппроксимация, устойчивость, сходимость	195
4.4.3. Исследование аппроксимации	198
4.4.4. Об устойчивости разностных схем для эволюционных уравнений	203
§ 4.5. Критерии устойчивости разностных схем	205
4.5.1. Принцип максимума — достаточный критерий устойчивости	206
4.5.2. Необходимый признак устойчивости Куранта, Фридрихса и Леви	210
4.5.3. О спектральном методе исследования устойчивости	213
4.5.4. Спектр линейных разностных операторов с постоянными коэффициентами на неограниченной прямой	214
4.5.5. Примеры исследования устойчивости спектральным методом	218
4.5.6. Спектры разностных операторов на полупрямых	220
4.5.7. Исследование устойчивости разностных схем на конечном отрезке	221
§ 4.6. Расчеты разрывных решений. Схема Годунова	224
4.6.1. «Схемная» вязкость	224
4.6.2. Схемы, сохраняющие монотонность	225
4.6.3. Схема для уравнений акустики	229
4.6.4. Схема Годунова для уравнений газодинамики	231

§ 4.7. Схемы годуновского типа	234
4.7.1. Схемы с коррекцией потоков	235
4.7.2. Невозрастание полной вариации	237
§ 4.8. Решение задач с разностными аналогами параболических уравнений	241
4.8.1. Неявные разностные схемы в одномерных задачах. Метод прогонки	241
4.8.2. Многомерные задачи. Методы переменных направлений. Расщепление по направлениям	246
4.8.3. Продольно-поперечная прогонка	248
§ 4.9. Итерационные методы решения краевых задач с эллиптическими уравнениями	250
4.9.1. Итерационные методы установления	250
4.9.2. Простейшая явная схема. Скорость сходимости	252
4.9.3. Скорость сходимости с продольно-поперечной прогонкой	255
4.9.4. Ускорение сходимости. Полиномы Чебышева	257
Список литературы	261