В. В. Соколов

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В ТЕОРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Институт
Компьютерных
Исследований

В. В. Соколов

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В ТЕОРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Институт Компьютерных Исследований

Москва ♦ Ижевск

2019

УДК 519.6
ББК 22.19
С594

РФФИ

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту № 19-11-00021, не подлежит продаже

Соколов В. В.

С594 Алгебраические структуры в теории интегрируемых систем. — М.–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2019. — 368 с.

ISBN 978-5-4344-0846-2

Рассматриваются алгебраические структуры, связанные с классическими интегрируемыми дифференциальными уравнениями. Уравнение Лакса изучается с точки зрения разложения алгебр петель в сумму двух подалгебр. Пары согласованных линейных скобок Пуассона трактуются как согласованные скобки Ли. Многополевые интегрируемые эволюционные системы связываются с алгебраическими неассоциативными структурами. Симметрийный подход к классификации интегрируемых уравнений обобщается на случай уравнений с матричными и векторными неизвестными. Рассматриваются алгебраические структуры, связанные с нелинейными гиперболическими системами лиувиллевского типа. Книга содержит много тщательно отобранных примеров и нерешенных научных задач разной степени трудности.

ББК 22.19
УДК 519.6

ISBN 978-5-4344-0846-2

Оглавление

Предисловие научного редактора 9

Предисловие автора 10

Глава 1. **Введение** 15
- 1.1. Список основных обозначений 15
  - 1.1.1. Константы, векторы и матрицы 15
  - 1.1.2. Дифференцирования и дифференциальные операторы 15
  - 1.1.3. Дифференциальная алгебра 16
  - 1.1.4. Алгебра 17
- 1.2. Пары Лакса 18
  - 1.2.1. Случай ОДУ 18
  - 1.2.2. Пары Лакса для эволюционных уравнений в частных производных 20
  - 1.2.3. Матричная задача Римана – Гильберта и процедура одевания 21
- 1.3. Гамильтоновы структуры 22
- 1.4. Инфинитезимальные симметрии 26
  - 1.4.1. Наивный симметрийный тест 29
- 1.5. Первые интегралы и локальные законы сохранения 31
- 1.6. Преобразования 33
  - 1.6.1. Точечные и контактные преобразования 33
  - 1.6.2. Дифференциальные подстановки типа преобразования Миуры 37

Часть I. Представления Лакса для интегрируемых систем

Глава 2. **Пары Лакса и факторизация алгебр Ли** 45
  - 2.0.1. Определения симметрий и законов сохранения 45
- 2.1. Скалярные пары Лакса для эволюционных уравнений 47

2.1.1. Псевдодифференциальные ряды 47
2.1.2. Иерархия Кортевега – де Фриза 50
2.1.3. Иерархия Гельфанда – Дикого и ее обобщения 59
2.2. Матричные пары Лакса 63
2.2.1. Иерархия НУШ 63
2.2.2. Обобщения 67
2.3. Разложения алгебр петель и пары Лакса 70
2.3.1. Факторизующие подалгебры для $\mathcal{G} = \mathfrak{so}_3$ 75
2.3.2. Интегрируемые системы типа волчков 80
2.3.3. Классические $\mathfrak{so}_3$-волчки 81
2.3.4. Обобщения волчков Эйлера и Стеклова – Ляпунова на случай $\mathfrak{so}_n$ 85
2.3.5. Факторизующие подалгебры для алгебр Каца – Муди . 86
2.3.6. Интегрируемые системы типа уравнения Ландау – Лифшица 88
2.3.7. Интегрируемые гиперболические модели типа уравнения кирального поля 91
2.4. Конечномерный метод факторизации, редукции и неассоциативные алгебры 92
2.4.1. Метод факторизации 92
2.4.2. Редукции 94
2.4.3. Обобщенный метод факторизации 98

Часть II. Алгебраические структуры в бигамильтоновом формализме

Глава 3. **Бигамильтонов формализм** 103
3.0.1. Метод сдвига аргумента 104
3.0.2. Бигамильтонова форма уравнения КдФ 106
3.1. Бигамильтонов формализм и пары согласованных алгебр . . . 107
3.1.1. Согласованные алгебры Ли. Примеры и приложения . 110
3.1.2. Согласованные скобки Ли, связанные с θ-функциями . 115
3.1.3. Ассоциативные алгебры, согласованные с Mat_m 119
3.2. Полиномиальные формы эллиптических систем Калоджеро – Мозера 132
3.2.1. Гамильтонианы Калоджеро – Мозера 132
3.2.2. Квазиточно решаемые дифференциальные операторы . 135

3.2.3. Коммутативные подалгебры в $U(\mathfrak{gl}_{N+1})$ и квантовые гамильтонианы Калоджеро – Мозера 140
3.2.4. Бигамильтонова природа классической эллиптической модели Калоджеро – Мозера 143

Часть III. Симметрийный подход к интегрируемости

Глава 4. **Основные понятия симметрийного подхода** 151
4.1. Описание некоторых классификационных результатов 151
4.1.1. Гиперболические уравнения 151
4.1.2. Эволюционные уравнения 152
4.1.3. Системы двух уравнений 158
4.2. Необходимые условия интегрируемости 161
4.2.1. Эволюционные векторные поля, рекурсионный оператор и вариационная производная 161
4.2.2. Формальные симметрии 163
4.2.3. Законы сохранения 166
4.2.4. Формальный симплектический оператор 167
4.2.5. Канонические плотности и условия интегрируемости . 170
4.2.6. Инвариантность условий интегрируемости относительно замен переменных 174
4.2.7. Классификация интегрируемых уравнений типа уравнения КдФ 177
4.2.8. Интегрируемые уравнения типа уравнения Гарри – Дима 179
4.2.9. Нелокальные переменные, эволюционные уравнения со связями и обращение дифференциальных подстановок 181
4.3. Рекурсионные и гамильтоновы слабонелокальные операторы 188
4.3.1. Слабонелокальные рекурсионные операторы 189
4.3.2. Слабонелокальные гамильтоновы операторы 193
4.3.3. Рекурсионные операторы для уравнения Кричевера – Новикова 194
4.3.4. Слабонелокальные гамильтоновы операторы для уравнения Кричевера – Новикова 197
4.4. Интегрируемые неэволюционные уравнения 199
4.4.1. Формальная симметрия и симплектический оператор . 200
4.4.2. Примеры 202

4.4.3. Условия интегрируемости 204
4.4.4. Слабонелокальные рекурсионные операторы 207
4.4.5. Обсуждение 209

Глава 5. **Интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа** 211
5.1. Обобщенные x- и y-интегралы 212
5.2. Инварианты Лапласа для линейного гиперболического оператора 215
5.3. Нелинейные гиперболические уравнения лиувиллевского типа 218
5.4. Дифференциальные подстановки и уравнения лиувиллевского типа 222
5.4.1. Дифференциальные подстановки первого порядка . . . 225
5.5. Предгамильтоновы операторы 226
5.5.1. Примеры предгамильтоновых операторов, связанных с уравнениями лиувиллевского типа 228
5.6. Интегрируемые многокомпонентные гиперболические системы лиувиллевского типа 234

Глава 6. **Интегрируемые неабелевы уравнения** 241
6.1. ОДУ на свободных ассоциативных алгебрах 241
6.1.1. Уравнения с матричными неизвестными 241
6.1.2. Системы дифференциальных уравнений на свободной ассоциативной алгебре 246
6.1.3. Квадратичные однородные неабелевы системы 248
6.1.4. Двухкомпонентные неабелевы системы 249
6.1.5. Интегрируемые скалярные квадратичные однородные системы 255
6.1.6. Неабелизация интегрируемых однородных скалярных систем 261
6.1.7. Интегрируемые неоднородные неабелевы системы . . 266
6.2. Неабелев гамильтонов формализм и скобки Пуассона на следах матриц 270
6.2.1. Скобки Пуассона на следах 270
6.2.2. Неабелевы скобки Пуассона на свободных ассоциативных алгебрах 278
6.2.3. Двойные скобки Пуассона на свободных ассоциативных алгебрах 285

6.3. Эволюционные уравнения на свободных ассоциативных алгебрах . . . 287
6.3.1. Матричные интегрируемые уравнения . . . 287
6.3.2. Неабелевы эволюционные уравнения . . . 290

Глава 7. **Интегрируемые системы и неассоциативные алгебры** . 294
7.1. Определения алгебраических структур . . . 294
7.1.1. Левосимметрические алгебры . . . 295
7.1.2. Йордановы алгебры . . . 295
7.1.3. Тройные йордановы системы . . . 296
7.2. Йордановы системы КдФ . . . 297
7.3. Левосимметрические алгебры и системы типа уравнения Бюргерса . . . 301
7.4. Интегрируемые уравнения, связанные с тройными йордановыми системами . . . 302
7.4.1. Системы типа уравнения мКдФ . . . 303
7.4.2. Системы типа уравнения НУШ . . . 307
7.4.3. Системы типа НУШ с производной . . . 308
7.5. Интегрируемые системы, соответствующие новым алгебраическим структурам . . . 309
7.5.1. Уравнения типа пропотенцированного мКдФ . . . 309
7.5.2. Уравнения типа системы Олвера – Соколова . . . 310
7.5.3. Системы типа уравнения мКдФ с двумя алгебраическими операциями . . . 311
7.6. Рациональные интегрируемые системы . . . 313
7.6.1. Обратный элемент как решение системы дифференциальных уравнений . . . 313
7.6.2. Несколько классов интегрируемых рациональных йордановых моделей . . . 315
7.7. Деформации неассоциативных алгебр и интегрируемые системы геометрического типа . . . 318
7.7.1. Геометрическое описание деформаций . . . 318
7.7.2. Алгебраическое описание деформаций . . . 319
7.7.3. Эволюционные уравнения геометрического типа . . . 320

Глава 8. **Интегрируемые векторные эволюционные уравнения** . 325
8.1. Интегрируемые полиномиальные векторные системы . . . 325

8.2. Симметрийный подход к классификации интегрируемых векторных уравнений . . . 327
8.2.1. Канонические плотности . . . 329
8.2.2. Оператор Эйлера и производная Фреше . . . 330
8.2.3. Векторные изотропные уравнения типа уравнения КдФ 332
8.2.4. Векторные уравнения геометрического типа . . . 335
8.2.5. Векторные автопреобразования Бэклунда . . . 337
8.2.6. Интегрируемые уравнения на сфере . . . 338
8.2.7. Уравнения с двумя скалярными произведениями . . . 339
8.2.8. Анизотропные уравнения с постоянным вектором . . . 341

Глава 9. **Дополнения** . . . 343
Дополнение 1. Гиперболические уравнения с интегрируемыми симметриями третьего порядка . . . 343
Дополнение 2. Скалярные гиперболические уравнения лиувиллевского типа . . . 344
Дополнение 3. Интегрируемые эволюционные уравнения . . . 346
9.3.1. Допустимые точечные преобразования . . . 346
9.3.2. Уравнения третьего порядка . . . 347
9.3.3. Уравнения пятого порядка . . . 348
Дополнение 4. Квазилинейные системы из двух уравнений второго порядка . . . 351

Литература . . . 353