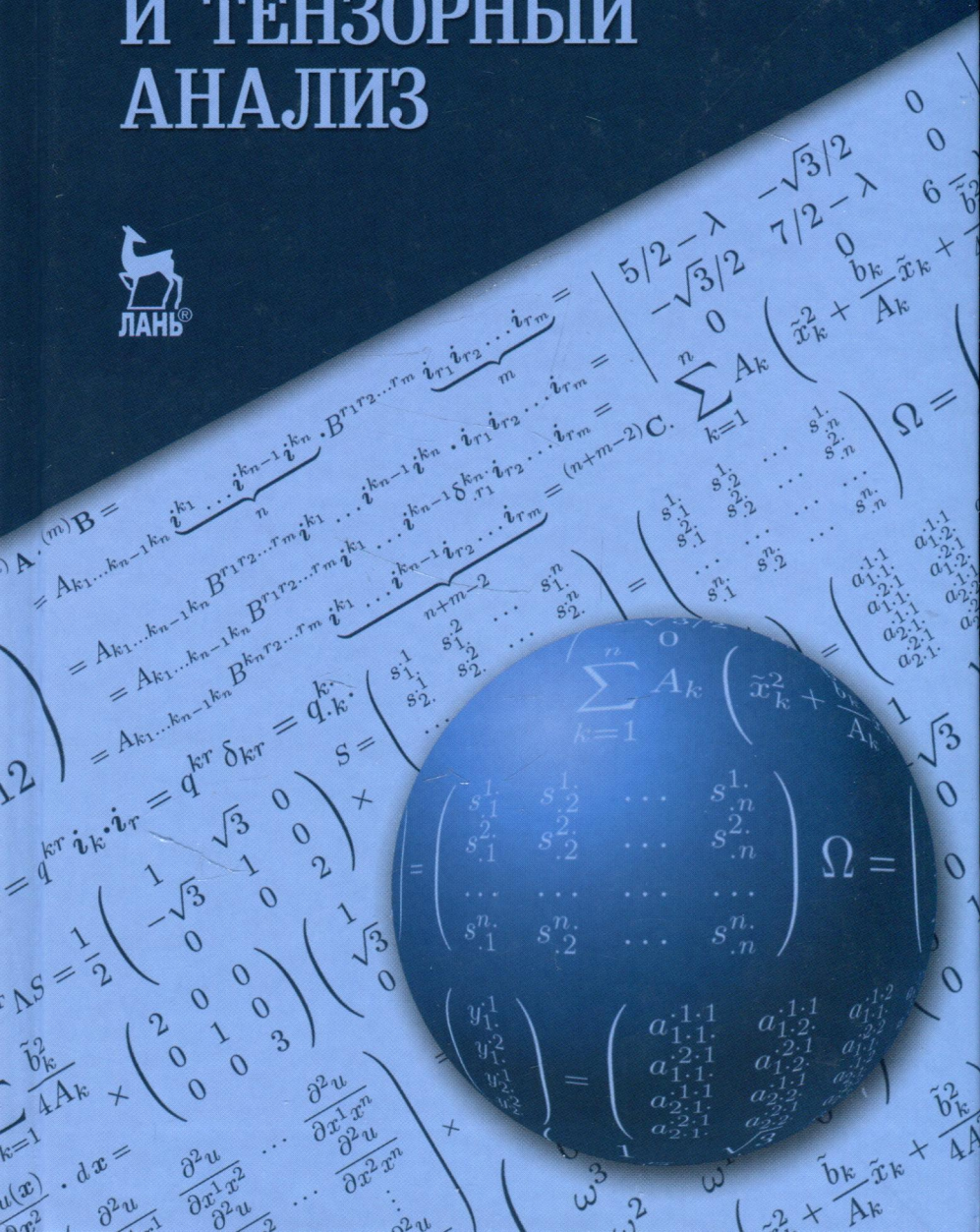


Б. А. Горлач

# ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ



Б. А. ГОРЛАЧ

# ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР  
2021

ББК 22.18я73

Г 69

**Горлач Б. А.**

**Г 69** Тензорная алгебра и тензорный анализ: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2021. — 160 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1834-3**

Содержатся основные сведения из тензорной алгебры и тензорного анализа. Изложение ведется от частного к общему. Тензоры представляются в операторной, матричной и компонентно-индексной формах в ортонормированном и произвольном базисах. Предлагаются необходимые для усвоения материала упражнения и расчетные работы.

Пособие предназначено специалистам, бакалаврам и магистрам, обучающимся по направлениям: «Прикладная математика и информатика», «Математика», «Прикладная математика», «Механика и математическое моделирование», «Прикладная математика и физика».

ББК 22.18я73

**Обложка**

**Е. А. ВЛАСОВА**

*Охраняется законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.  
Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2021

© Б. А. Горлач, 2021

© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i> . . . . .	3
<i>Основные обозначения</i> . . . . .	5
<i>Глава 1. Алгебра тензоров</i> . . . . .	7
§ 1.1. Преобразование векторов ортонормированных базисов . . . . .	8
§ 1.2. Преобразование координат векторов при преобразовании базисов . . . . .	11
§ 1.3. Диада векторов . . . . .	13
§ 1.4. Диада векторов, заданных в базисе пространства $L_{n^2}$ . . . . .	16
§ 1.5. Тензор второго ранга . . . . .	18
§ 1.6. Тензоры ранга $n$ . . . . .	21
§ 1.7. Матрицы тензоров . . . . .	25
§ 1.8. Свертывание индексов . . . . .	30
§ 1.9. Симметрирование и альтернирование тензоров . . . . .	33
§ 1.10. Тензор поворота . . . . .	36
§ 1.11. Изотропные тензоры . . . . .	39
§ 1.12. Обратный тензор . . . . .	40
§ 1.13. Собственные значения тензора . . . . .	42
§ 1.14. Собственные векторы тензора . . . . .	45
§ 1.15. Теорема Кейли–Гамильтона . . . . .	51
§ 1.16. Соотношения между инвариантами тензоров . . . . .	54
§ 1.17. Девиатор и шаровой тензор . . . . .	56
§ 1.18. Полярное разложение тензора . . . . .	58
§ 1.19. Вектор тензора . . . . .	62
§ 1.20. Тензорные поверхности . . . . .	64
§ 1.21. Функции тензоров . . . . .	66
<i>Вопросы для самоконтроля</i> . . . . .	67
§ 1.22. Задание на расчетную работу . . . . .	69
<i>Глава 2. Тензорный анализ</i> . . . . .	72
§ 2.1. Векторный оператор Гамильтона . . . . .	72
§ 2.2. Дифференциальные операции над векторами . . . . .	73
§ 2.3. Дифференциальные операции над тензорами . . . . .	78
§ 2.4. Двукратное дифференцирование . . . . .	80
§ 2.5. Дифференцирование скалярной функции по тензору . . . . .	82
§ 2.6. Ряд Тейлора . . . . .	82

§ 2.7. Локальные экстремумы . . . . .	86
§ 2.8. Глобальные экстремумы . . . . .	92
§ 2.9. Условный экстремум . . . . .	97
§ 2.10. Множители Лагранжа . . . . .	99
§ 2.11. Метод градиентного спуска . . . . .	101
§ 2.12. Преобразование интегралов . . . . .	107
§ 2.13. Преобразование Стокса . . . . .	110
<i>Вопросы для самоконтроля</i> . . . . .	111
§ 2.14. Задание на расчетную работу . . . . .	112
<i>Глава 3. Тензоры в произвольных координатах</i> . . . . .	114
§ 3.1. Преобразования произвольных систем координат . . . . .	114
§ 3.2. Базисные векторы криволинейных неортогональных координат . . . . .	117
§ 3.3. Основной и взаимный базисы . . . . .	119
§ 3.4. Преобразование векторов базиса при преобразовании координат . . . . .	121
§ 3.5. Ковариантные и контравариантные координаты тензоров . . . . .	123
§ 3.6. Метрический тензор . . . . .	126
§ 3.7. Площади и объемы, порождаемые базисными векторами . . . . .	129
§ 3.8. Главные значения и инварианты симметричного тензора . . . . .	131
§ 3.9. Дифференцирование базисных векторов . . . . .	132
§ 3.10. Коэффициенты Ламе . . . . .	134
§ 3.11. Ковариантное дифференцирование . . . . .	136
§ 3.12. Тензор Римана–Кристоффеля . . . . .	139
§ 3.13. Дифференцирование векторов базиса . . . . .	142
§ 3.14. Дифференцирование по ортогональным координатам . . . . .	144
§ 3.15. Зависимости Ламе . . . . .	148
<i>Вопросы для самоконтроля</i> . . . . .	151
§ 3.16. Задание на расчетную работу . . . . .	152
<i>Литература</i> . . . . .	154