

Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев

# ДИСКРЕТНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

Все важнейшие дискретные модели

• ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ,  
• МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ  
• И КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

и методы их применения

В ТЕОРИИ И ПРАКТИКЕ

Для специалистов, занимающихся вопросами  
**ЭКОНОМИКИ, СОЦИОЛОГИИ, ФИНАНСОВОЙ СФЕРЫ,**  
**БИОЛОГИИ, МЕДИЦИНЫ,** а также **КРИПТОГРАФИИ**  
и **ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ,** для которых сегодня  
статистические методы являются основным  
инструментом анализа, прогнозирования  
и принятия научно обоснованных решений



**Г. И. Ивченко  
Ю. И. Медведев**

# **ДИСКРЕТНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ**

**Все важнейшие дискретные модели  
теории вероятностей,  
математической статистики  
и комбинаторного анализа  
и методы их применения  
в теории и практике**



**URSS  
МОСКВА**

ББК 22.1я73 22.1я2 22.171 22.172

**Ивченко Григорий Иванович,  
Медведев Юрий Иванович**

**Дискретные вероятностные модели: Все важнейшие дискретные модели теории вероятностей, математической статистики и комбинаторного анализа и методы их применения в теории и практике.** — М.: ЛЕНАНД, 2021. — 620 с.

Данная книга является вероятностно-статистическим справочником, содержащим обзор накопленных к настоящему времени результатов по важнейшим дискретным моделям теории вероятностей, математической статистики и комбинаторного анализа и методов применения их в теории и практике.

Справочник предназначен научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам, студентам и инженерам практически всех современных специальностей, использующим в своей работе вероятностно-статистические методы. Как показывает практика последних десятилетий, справочник особенно будет полезен специалистам, занимающимся вопросами экономики, социологии, финансовой сферы, биологии, медицины, а также криптографии и защиты информации, для которых сегодня статистические методы являются основным инструментом анализа, прогнозирования и принятия научно обоснованных решений.

**Рецензенты:**

действительный член Академии криптографии РФ  
д-р физ.-мат. наук, проф. *В. П. Чистяков*;  
действительный член Академии криптографии РФ  
д-р физ.-мат. наук, *А. М. Шойтов*

ООО «ЛЕНАНД». 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 38,75. Зак. № 163868.

Отпечатано в АО «Т 8 Издательские Технологии».  
109316, Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5.

ISBN 978-5-9710-7145-7

© ЛЕНАНД, 2021

24748 ID 243702



9 785971 071457

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
 URSS	E-mail: <a href="mailto:URSS@URSS.ru">URSS@URSS.ru</a>
	Каталог изданий в Интернете: <a href="http://URSS.ru">http://URSS.ru</a>
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Содержание

<b>Предисловие</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>Введение. Основные понятия и теоретические сведения</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>Часть I</b>	
<b>Одномерные модели</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>Глава 1. Биномиальная модель</b> . . . . .	<b>26</b>
1.1. Определение и вероятностные свойства . . . . .	26
1.2. Асимптотические результаты и приближения . . . . .	41
1.3. Обобщенное биномиальное распределение . . . . .	48
1.4. Конвея—Максвелла биномиальное распределение (COMB) . . . . .	50
1.5. Другие обобщения биномиального распределения . . . . .	51
1.6. Статистические выводы . . . . .	53
1.7. Моделирование . . . . .	59
<b>Глава 2. Отрицательное биномиальное распределение</b> . . . . .	<b>61</b>
2.1. Определение и вероятностные свойства . . . . .	61
2.2. Геометрическое распределение . . . . .	67
2.3. Статистические выводы . . . . .	68
2.4. Моделирование . . . . .	69
<b>Глава 3. Пуассоновская модель</b> . . . . .	<b>71</b>
3.1. Определение и вероятностные свойства . . . . .	71
3.2. Асимптотические результаты и приближения . . . . .	79
3.3. Статистические выводы . . . . .	84
3.4. Моделирование . . . . .	89
<b>Глава 4. Гипергеометрическое распределение</b> . . . . .	<b>90</b>
4.1. Определение и вероятностные свойства . . . . .	90
4.2. Статистические выводы . . . . .	99
4.3. Моделирование . . . . .	99
<b>Глава 5. Модель степенного ряда</b> . . . . .	<b>101</b>
5.1. Определение и вероятностные свойства . . . . .	101
5.2. Предельные теоремы . . . . .	102
5.3. Статистические выводы . . . . .	103
5.4. Модифицированное PCP . . . . .	105



<b>Глава 6. Одномерная модель Маркова—Пойа</b> . . . . .	<b>106</b>
6.1. Определение модели . . . . .	106
6.2. Предельные распределения . . . . .	107
6.3. Перестановочность . . . . .	108
6.4. Процесс Пойа . . . . .	109
<b>Глава 7. Равномерное дискретное распределение</b> . . . . .	<b>110</b>
7.1. Определение . . . . .	110
7.2. Асимптотика . . . . .	110
7.3. Оценивание размера конечной совокупности . . . . .	111
7.4. Прогнозирование в схеме повторного выбора . . . . .	112
<b>Глава 8. Логарифмическое распределение</b> . . . . .	<b>113</b>
8.1. Определение и свойства . . . . .	113
8.2. Предельные теоремы . . . . .	115
8.3. Распределение Стирлинга первого рода . . . . .	115
8.4. Оценивание . . . . .	116
<b>Глава 9. Пуассона-биномиальное распределение</b> . . . . .	<b>117</b>
9.1. Определение и свойства . . . . .	117
9.2. Оценивание . . . . .	118
<b>Глава 10. Распределение Неймана типа А</b> . . . . .	<b>119</b>
10.1. Определение и свойства . . . . .	119
10.2. Предельные формы и аппроксимации . . . . .	120
10.3. Оценивание . . . . .	121
10.4. Обобщения . . . . .	121
<b>Глава 11. Распределения, основанные на разложениях в ряды</b> . . . . .	<b>123</b>
11.1. Лагранжевы распределения . . . . .	123
11.2. Распределения Гоулда . . . . .	124
11.3. Распределения Абеля . . . . .	125
<b>Глава 12. Другие дискретные распределения</b> . . . . .	<b>126</b>
12.1. Вырожденное распределение . . . . .	126
12.2. Распределение Бореля—Таннера . . . . .	126
12.3. Распределение Эрмита . . . . .	127
12.4. Распределение Пойа—Аеппли (Polya—Aeppli) . . . . .	128
12.5. Распределение Пуассона—Паскаля . . . . .	130
12.6. Распределение Томаса . . . . .	131
12.7. $J$ -распределение . . . . .	131
12.8. Распределение (семейство) Каца и его расширения . . . . .	132
12.9. Семейство Орда . . . . .	133
12.10. Обобщенное гипергеометрическое распределение . . . . .	134

12.11. Распределения факториального ряда . . . . .	135
12.12. Ципфа и дзета-распределения . . . . .	136
12.13. Одномерные распределения в многомерных моделях . . . . .	137
12.14. Распределения значащих цифр . . . . .	138
12.15. Дискретное распределение арксинуса . . . . .	139
12.16. Дискретное распределение Гаусса—Лежандра . . . . .	140
12.17. Сдвинутое логбиномиальное распределение . . . . .	141
12.18. Распределения расстояний между соседними локальными максимумами . . . . .	141
12.19. Распределение Ландсберга (Landsberg, 1895) . . . . .	142

## Часть II

### Многомерные модели . . . . . 143

#### Глава 1. Полиномиальная модель . . . . . 144

1.1. Определение и вероятностные свойства . . . . .	144
1.2. Асимптотические результаты . . . . .	155
1.3. Некоторые статистики от частот полиномиальной схемы . . . . .	161
1.4. $\alpha$ -цепочки последовательности полиномиальных испытаний . . . . .	173
1.5. Статистические выводы . . . . .	180
1.6. Моделирование . . . . .	206

#### Глава 2. Отрицательная полиномиальная модель . . . . . 208

2.1. Определение и вероятностные свойства . . . . .	208
2.2. Асимптотические результаты . . . . .	212
2.3. Статистические выводы . . . . .	213

#### Глава 3. Многомерное гипергеометрическое распределение . . . . . 216

3.1. Определение и вероятностные свойства . . . . .	216
3.2. Асимптотические результаты . . . . .	219
3.3. Статистические выводы . . . . .	219
3.4. Распределения, связанные с МГТР . . . . .	221
3.5. Обобщенная схема выбора . . . . .	223

#### Глава 4. Многомерная модель Маркова—Пойа . . . . . 233

4.1. Определение и вероятностные свойства . . . . .	233
4.2. Асимптотические результаты . . . . .	237
4.3. Граничные задачи и моменты остановки . . . . .	239
4.4. Статистические выводы . . . . .	241
4.5. Обобщенная урновая схема с переменным составом . . . . .	246

<b>Глава 5. Случайные размещения</b> . . . . .	<b>249</b>
5.1. Введение . . . . .	249
5.2. Предельные теоремы . . . . .	250
5.3. Обратные задачи (время ожидания) . . . . .	253
5.4. Время ожидания в схемах размещения со случайными уровнями . . . . .	256
5.5. Порядковые статистики . . . . .	262
5.6. Случайное число частиц . . . . .	264
5.7. Размещение частиц комплектами . . . . .	266
5.8. Марковские схемы размещения . . . . .	267
5.9. Процессы в схемах размещения . . . . .	270
<b>Глава 6. Обобщенная схема размещения</b> . . . . .	<b>272</b>
6.1. Определение и свойства . . . . .	272
6.2. Предельное поведение РРС . . . . .	275
6.3. Примеры применения ОСР . . . . .	280
<b>Глава 7. Подстановки</b> . . . . .	<b>286</b>
7.1. Комбинаторные свойства подстановок . . . . .	286
7.2. Равновероятная модель. Распределение цикловой структуры . . . . .	300
7.3. Параметрическая модель . . . . .	308
7.4. Статистика параметрической модели . . . . .	320
7.5. Редуцируемые подстановки . . . . .	325
7.6. Подстановки с трансформированными циклами . . . . .	327
7.7. Случайные неполные подстановки . . . . .	332
7.8. Методы генерации подстановок . . . . .	341
<b>Глава 8. Случайные многочлены</b> . . . . .	<b>347</b>
8.1. Введение . . . . .	347
8.2. Исходные соотношения . . . . .	349
8.3. Производящие функции . . . . .	351
8.4. Предельные распределения аддитивных структурных характеристик . . . . .	352
8.5. Асимптотическое поведение экстремальных характеристик . . . . .	356
8.6. Другие результаты . . . . .	359
8.7. Приложение . . . . .	363
<b>Глава 9. Конечные цепи Маркова</b> . . . . .	<b>365</b>
9.1. Введение и предмет исследования . . . . .	365
9.2. Предельные распределения . . . . .	366
9.3. Цепь Маркова с двумя состояниями . . . . .	370
9.4. Статистические выводы . . . . .	376

<b>Глава 10. Разбиения конечных множеств</b> . . . . .	<b>387</b>
10.1. Введение и основные понятия . . . . .	387
10.2. Распределение числа блоков в случайном разбиении . . . . .	392
10.3. Распределение числа блоков заданной величины в случайном разбиении . . . . .	394
10.4. Минимальный и максимальный блоки в случайном разбиении . . . . .	397
10.5. Случайные АЛ-разбиения с помеченными блоками . . . . .	398
10.6. Разбиения с поглощениями и противоречивые разбиения . . . . .	400
10.7. Другие статистики на разбиениях . . . . .	406
10.8. Параметрическая модель . . . . .	408
<b>Глава 11. Общая параметрическая модель     для случайных комбинаторных объектов</b> . . . . .	<b>422</b>
11.1. Введение: модель и ее основные фрагменты . . . . .	422
11.2. Влияние выбора параметрической последовательности $\{\theta_j\}$ на асимптотическое поведение характеристик случайной $n$ -подстановки . . . . .	425
11.3. Двухпараметрическая модель . . . . .	432
11.4. Классификация мер . . . . .	438
11.5. Сингулярная модель для случайных подстановок . . . . .	439
11.6. Сингулярная модель для случайных разбиений . . . . .	445
<b>Глава 12. Случайные булевы функции и их спектры</b> . . . . .	<b>451</b>
12.1. Введение . . . . .	451
12.2. $p$ -модель . . . . .	454
12.3. Модель $F_{nk}$ . . . . .	457
12.4. Симметрические булевы функции и их спектры . . . . .	460
12.5. Модель $S_{nr}$ . . . . .	464
12.6. Метрические свойства симметрических булевых функций . . . . .	467
12.7. Спектральная структура случайных булевых функций . . . . .	471
<b>Часть III</b>	
<b>Три столпа дискретной математики</b> . . . . .	<b>479</b>
<b>Глава 1. Классические модели</b> . . . . .	<b>480</b>
1.1. Введение. Определения, основные соотношения и производящие функции . . . . .	480
1.2. Асимптотические результаты . . . . .	487
1.3. Унимодальность . . . . .	495
<b>Глава 2. Суммы и арифметические свойства     биномиальных коэффициентов</b> . . . . .	<b>499</b>



---

<b>Глава 3. Параметрические модели чисел Стирлинга . . . . .</b>	<b>523</b>
3.1. Определения, представления и комбинаторный смысл различных модификаций чисел Стирлинга . . . . .	523
3.2. Производящие функции и рекуррентные соотношения . . . . .	531
3.3. Алгебраические свойства и оценки . . . . .	537
3.4. Асимптотические результаты . . . . .	538
<b>Дополнение I. Предельные теоремы в дискретных моделях . . . . .</b>	<b>543</b>
<b>Дополнение II. Корни производящих функций и суммы целочисленных случайных величин . . . . .</b>	<b>555</b>
1. Введение . . . . .	555
2. Представления дискретных случайных величин суммами простейших независимых случайных величин . . . . .	558
3. Необходимые условия для принадлежности корней левой полуплоскости. Слабая лог-выпуклость . . . . .	560
4. Предельные теоремы . . . . .	561
5. Примеры . . . . .	562
<b>Литература . . . . .</b>	<b>567</b>