

В.И. Богачев, Н.В. Крылов,  
М.Рёкнер, С.В. Шапошников

УРАВНЕНИЯ  
ФОККЕРА - ПЛАНКА - КОЛМОГОРОВА

*В. И. Богачев, Н. В. Крылов,  
М. Рёкнер, С. В. Шапошников*

# УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА – ПЛАНКА – КОЛМОГорова



Москва ♦ Ижевск

2013

УДК 517.95, 519.21



Издание осуществлено при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
по проекту № 13-01-07017-д

*Издание РФФИ не подлежит продаже*

**Богачев В. И., Крылов Н. В., Рёкнер М., Шапошников С. В.**

Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. — 592 с.

Дается систематическое изложение современной теории эллиптических и параболических уравнений для мер; типичными примерами являются уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для вероятностных распределений. Книга рассчитана на математиков и физиков, соприкасающихся в своих исследованиях с диффузионными процессами и эллиптическими и параболическими уравнениями.

Библ. 826.

**ISBN 978-5-4344-0154-8**

© В. И. Богачев, Н. В. Крылов, М. Рёкнер, С. В. Шапошников, 2013

© Ижевский институт компьютерных исследований, 2013

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

# Оглавление

Предисловие	7
<b>Глава 1. Стационарные уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова</b>	<b>13</b>
1.1. Предварительные сведения	13
1.2. Эллиптические уравнения	21
1.3. Диффузионные процессы	27
1.4. Основные задачи	35
1.5. Существование плотностей	43
1.6. Локальные свойства плотностей	52
1.7. Регулярность решений дивергентных уравнений	60
1.8. Дополнения, комментарии и задачи Дробные классы Соболева (71). Повышение соболевской регулярности решений (76). Перенормированные решения (78). Комментарии (79). Задачи (82).	71
<b>Глава 2. Существование решений</b>	<b>85</b>
2.1. Принцип максимума и задача Дирихле	85
2.2. Положительные решения дивергентных уравнений	92
2.3. Функции Ляпунова и априорные оценки	94
2.4. Построение решений стационарных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова	101
2.5. Дополнения, комментарии и задачи Разрешимость уравнений с потенциалом (106). Разрешимость уравнений на многообразиях (108). Отсутствие интегрируемых решений (110). Нелинейные уравнения (111). Комментарии (116). Задачи (117).	106

<b>Глава 3. Глобальные свойства плотностей</b>	<b>119</b>
3.1. Квадратичная интегрируемость логарифмических градиентов	119
3.2. Глобальная соболевская регулярность	131
3.3. Верхние оценки плотностей	143
3.4. Неравенство Харнака и нижние оценки плотностей	146
3.5. Положительность плотностей	157
3.6. Обоснования результатов о положительности	166
3.7. Дополнения, комментарии и задачи	173
Оценки решений на многообразиях (173). Еще о неравенстве Харнака (174). Лемма Джона – Ниренберга (175). Комментарии (177). Задачи (178).	
<b>Глава 4. Проблемы единственности</b>	<b>181</b>
4.1. Условия единственности	182
4.2. Случаи неединственности	193
4.3. Интегрируемые решения	209
4.4. Уравнения с потенциалом	219
4.5. Дополнения, комментарии и задачи	223
Случай многообразия (223). Единственность решения задачи Дирихле для уравнения с младшими членами (224). Весовые классы Соболева (226). Комментарии (228). Задачи (229).	
<b>Глава 5. Ассоциированные полугруппы</b>	<b>231</b>
5.1. Общие сведения о полугруппах	231
5.2. Ассоциированные полугруппы	240
5.3. Инвариантность и $m$ -диссипативность	255
5.4. Инвариантность и единственность	266
5.5. Примеры единственности	270
5.6. Дополнения, комментарии и задачи	274
Существенная самосопряженность операторов Дирихле (274). Марковские и феллеровские полугруппы (276). Инвариантные меры марковских полугрупп (282). Существование инвариантных мер (287). Компактность полугрупп (291). Оценки диффузионных полугрупп (298). Оценки градиентов в случае диссипативного сноса (300). Комментарии (305). Задачи (309).	
<b>Глава 6. Параболические уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова</b>	<b>313</b>
6.1. Основные задачи	313
6.2. Предварительные сведения	318

6.3.	Существование плотностей	326
6.4.	Локальная регулярность	331
6.5.	Локальные оценки	342
6.6.	Существование решения задачи Коши	347
6.7.	Дополнения, комментарии и задачи Градиентные потоки (356). Разрешимость вырожденных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова (359). Нелинейные параболические уравнения для мер (362). Комментарии (369). Задачи (371).	356
<b>Глава 7.</b>	<b>Глобальная параболическая регулярность и верхние оценки</b>	<b>373</b>
7.1.	Априорные оценки с функцией Ляпунова	373
7.2.	Глобальные верхние оценки	382
7.3.	Верхние оценки решений задачи Коши	387
7.4.	Квадратичная интегрируемость логарифмических градиентов	399
7.5.	Дополнения, комментарии и задачи Оценки типа Нэша – Аронсона (406). Комментарии (407). Задачи (408).	406
<b>Глава 8.</b>	<b>Параболическое неравенство Харнака и нижние оценки</b>	<b>409</b>
8.1.	Параболическое неравенство Харнака	409
8.2.	Нижние оценки плотностей	413
8.3.	Положительность плотностей	417
8.4.	Доказательство основной леммы	428
8.5.	Дополнения, комментарии и задачи Лемма Мозера (433). Комментарии (435). Задачи (436).	433
<b>Глава 9.</b>	<b>Единственность решений уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова</b>	<b>437</b>
9.1.	Постановка задач	437
9.2.	Примеры неединственности	443
9.3.	Случай матрицы диффузии класса $VMO$	446
9.4.	Случай липшицевой матрицы диффузии	455
9.5.	Доказательство основной леммы	464
9.6.	Единственность интегрируемого решения	478
9.7.	Доказательства вспомогательных лемм	482

9.8.	Дополнения, комментарии и задачи Единственность для вырожденных уравнений (486). Вероятностные методы доказательства единственности (491). Оценки в метрике Канторовича (494). Комментарии (496). Задачи (497).	486
<b>Глава 10.</b>	<b>Бесконечномерный случай</b>	<b>499</b>
10.1.	Уравнения в бесконечномерных пространствах	499
10.2.	Свойства решений	512
10.3.	Существование в эллиптическом случае	517
10.4.	Разрешимость задачи Коши	525
10.5.	Дополнения, комментарии и задачи Единственность в бесконечномерном случае (531). Бесконечномерные нелинейные уравнения (535). Комментарии (539). Задачи (542).	531
	Литература	543
	Предметный указатель	589