

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК



Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко

# СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДЫ  
И  
ПРИЛОЖЕНИЯ



URSS

3

Теория гомологий



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

---

Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко

# СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

---

Том 3

---

Теория гомологий

Издание шестое



URSS  
МОСКВА

ББК 22.151

**Дубровин Борис Анатольевич,  
Новиков Сергей Петрович,  
Фоменко Анатолий Тимофеевич**

**Современная геометрия: Методы и приложения. Т. 3: Теория гомологий.**  
Изд. 6-е. — М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 288 с.  
(Классический университетский учебник.)

Настоящая книга содержит доступное изложение методов теории гомологий, освобожденное от утомительного языка абстрактной гомологической алгебры. Более сложная часть книги содержит введение в современные методы вычисления гомотопических групп и классификации многообразий.

Для научных работников различных специальностей — математиков, механиков, физиков-теоретиков.

Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»». 117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.  
Формат 70×100/16. Печ. л. 18. Зак. № 315

Отпечатано в ООО «Чебоксарская типография №1».  
428019, г. Чебоксары, пр-т И. Яковлева, 15.

**ISBN 978–5–453–00049–4**  
(УРСС)

**ISBN 978–5–397–03934–5**  
(Книжный дом «ЛИБРОКОМ»)

© Б. А. Дубровин, С. П. Новиков,  
А. Т. Фоменко, 1984, 2013

© УРСС, 2013

13926 ID 170772



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельцев.

# Оглавление

Предисловие к первому изданию . . . . .	7
<b>Глава 1. Гомологии и когомологии. Рецепты их вычисления . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Группы когомологий как классы замкнутых дифференциальных форм. Их гомотопическая инвариантность . . . . .	9
§ 2. Гомологии алгебраических комплексов . . . . .	20
§ 3. Симплициальные комплексы. Их гомологии и когомологии. Классификация двумерных замкнутых поверхностей . . . . .	25
§ 4. Операция приклейки клетки к топологическому пространству. Клеточные пространства. Теоремы о приведении клеточных пространств. Гомологии и фундаментальная группа поверхностей и некоторых других многообразий . . . . .	38
§ 5. Сингулярные гомологии и когомологии. Их гомотопическая инвариантность. Точная последовательность пары. Относительные гомологии . . . . .	49
§ 6. Сингулярные гомологии клеточных комплексов. Их совпадение с клеточными гомологиями. Двойственность Пуанкаре для симплициальных гомологий . . . . .	59
§ 7. Гомологии прямого произведения. Умножение в когомологиях. Когомологии $H$ -пространств и групп Ли. Когомологии унитарной группы . . . . .	66
§ 8. Гомологии косых произведений (расслоенных пространств) . . . . .	75
§ 9. Задача о продолжении отображений, гомотопий и сечений. Препятствующий класс когомологий . . . . .	85
§ 10. Гомологии и методы вычисления гомотопических групп. Теорема Картана—Серра. Когомологические операции. Векторные расслоения . . . . .	90
§ 11. Гомологии и фундаментальная группа . . . . .	112
§ 12. Когомологии гиперэллиптических римановых поверхностей. Торы Якоби. Геодезические на многоосных эллипсоидах. Связь с конечнозонными потенциалами . . . . .	118
§ 13. Простейшие свойства кэлеровых многообразий. Абелевы торы . . . . .	129
§ 14. Гомологии с коэффициентами в пучках . . . . .	133
<b>Глава 2. Критические точки гладких функций и гомологии . . . . .</b>	<b>138</b>
§ 15. Функции Морса и клеточные комплексы . . . . .	138
§ 16. Неравенства Морса . . . . .	143
§ 17. Правильная функция Морса—Смейла. Ручки. Поверхности . . . . .	148
§ 18. Двойственность Пуанкаре . . . . .	157
§ 19. Критические точки гладких функций и категория Люстерника—Шнирельмана . . . . .	161
§ 20. Критические многообразия и неравенства Морса. Функции с симметрией . . . . .	172

§ 21. Критические точки функционалов и топология пространства путей $\Omega M$ . . . . .	178
§ 22. Применения теоремы об индексе . . . . .	187
§ 23. Периодическая задача вариационного исчисления . . . . .	193
§ 24. Функции Морса на трехмерных многообразиях и диаграммы Хегора . . . . .	200
§ 25. Унитарная периодичность Ботта и многомерные вариационные задачи . . . . .	204
§ 26. Теория Морса и некоторые движения в плоской задаче $n$ тел . . . . .	221
<b>Глава 3. Кобордизмы и гладкие структуры . . . . .</b>	<b>232</b>
§ 27. Характеристические числа. Кобордизмы. Циклы и подмногообразия. Сигнатура многообразий . . . . .	232
§ 28. Гладкие структуры на семимерной сфере. Проблема классификации гладких многообразий (нормальные инварианты). Кручение Райдемайстера и основная гипотеза комбинаторной топологии . . . . .	251
<b>Литература . . . . .</b>	<b>261</b>
<b>Приложение 1. Аналог теории Морса для многозначных функций. Некоторые свойства скобок Пуассона (С. П. Новиков) . . . . .</b>	<b>264</b>
<b>Приложение 2. Задача Плато, бордизмы и глобально минимальные поверхности в римановых многообразиях. (А. Т. Фоменко) . . . . .</b>	<b>274</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>286</b>