

Физико·
Математическое
Наследие

И. И. ПРИВАЛОВ

**ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО
ПЕРЕМЕННОГО**



Математика

Теория функций



И. И. Привалов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
высших учебных заведений

Издание шестнадцатое



URSS

МОСКВА

ББК 22.161 22.162 22.1я73 22.1я44

Привалов Иван Иванович

Введение в теорию функций комплексного переменного: Учебник.
Изд. 16-е. — М.: ЛЕНАНД, 2015. — 440 с. (Физико-математическое наследие: математика (теория функций).)

Вниманию читателей предлагается классический учебник для высших учебных заведений по теории функций комплексного переменного, написанный выдающимся советским математиком, членом-корреспондентом АН СССР И. И. Приваловым.

Учебник предназначен прежде всего для студентов вузов; он также будет полезен преподавателям, аспирантам, научным работникам.

Рецензент:

д-р физ.-мат. наук, проф. Л. Д. Кудрявцев

Формат 60×90/16. Печ. л. 27,5. Зак. № БТ-72.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-9710-1399-0

© ЛЕНАНД, оформление, 2015

15301 ID 189742



9 785971 013990

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45
	URSS

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловия	10
Введение	11

Г Л А В А I

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Комплексные числа и действия над ними	16
1. Понятие комплексного числа (16). 2. Сложение и умножение комплексных чисел (16). 3. Вычитание и деление комплексных чисел (18).	
§ 2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Теоремы о модуле и аргументе	19
1. Геометрическое изображение комплексных чисел (19). 2. Геометрическое истолкование сложения и вычитания комплексных чисел (20). 3. Понятие о модуле и аргументе (20). 4. Теоремы о модуле и аргументе (21). 5. Геометрическое изображение числа $1/\alpha$ (23). 6. Геометрическое построение произведения и частного комплексных чисел (24).	
§ 3. Пределы	25
1. Основной принцип теории пределов (25). 2. Понятие предельной точки (26). 3. Ограниченные и неограниченные последовательности комплексных чисел (27). 4. Теорема Больцано — Вейерштрасса (27). 5. Понятие сходящейся последовательности комплексных чисел (28). 6. Основные теоремы теории пределов (29). 7. Критерий Коши (29).	
§ 4. Числовая сфера. Бесконечно удаленная точка	31
1. Изображение комплексных чисел на сфере. Бесконечно удаленная точка (31). 2. Формулы стереографической проекции (32). 3. Основное свойство стереографической проекции (33). 4. Сохранение углов (34).	
§ 5. Ряды	35
1. Понятие сходящегося и расходящегося ряда (35). 2. Необходимый признак сходимости ряда (36). 3. Понятие абсолютно сходящегося ряда (36). 4. Сложение и вычитание рядов (38). 5. Теорема о двойных рядах (38). 6. Перестановка членов ряда (40). 7. Умножение рядов (41).	
Упражнения к гл. I	43

Г Л А В А II

КОМПЛЕКСНОЕ ПЕРЕМЕННОЕ И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Функции комплексного переменного	45
1. Понятие функции комплексного переменного (45). 2. Понятие области. Линия Жордана (46). 3. Непрерывность функции комплексного переменного (49). 4. Теорема о равномерной непрерывности. Лемма Гейне — Бореля (52).	

§ 2. Ряды функций	54
1. Понятие равномерно сходящегося ряда (54). 2. Теорема о непрерывности суммы ряда (56). 3. Признак равномерного сходящегося ряда (57).	
§ 3. Степенные ряды	58
1. Понятие области сходимости степенного ряда (58). 2. Первая теорема Абеля (58). 3. Круг сходимости (59). 4. Понятие наибольшего предела (61). 5. Определение радиуса сходимости (63). 6. Равномерная сходимость степенного ряда (66). 7. Вторая теорема Абеля (67).	
§ 4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Элементарные функции	69
1. Понятие производной (61). 2. Понятие функции, аналитической в области (70). 3. Понятие дифференциала (71). 4. Условия Коши — Римана (72). 5. Сопряженные гармонические функции (76). 6. Дифференцирование степенных рядов (77). 7. Показательная функция. Функции тригонометрические и гиперболические (78). 8. Однолистные функции. Обратные функции (82). 9. Радикал, логарифм и арксинус (84). 10. Ветви многозначных функций. Понятие о точках разветвления (86). 11. Понятие о римановой поверхности (92).	
§ 5. Конформное отображение	97
1. Геометрический смысл аргумента производной (97). 2. Геометрический смысл модуля производной (99). 3. Конформное отображение (100). 4. Конформное отображение II рода (100). 5. Геометрический смысл дифференциала (102). 6. Главная часть отображения $w = z + i(z^2)$ (103).	
Упражнения к гл. II	105

Г Л А В А III

ЛИНЕЙНЫЕ И ДРУГИЕ ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Линейная функция	108
1. Целая линейная функция (108). 2. Функция $w = 1/z$ (109). 3. Общая линейная функция (110). 4. Круговое свойство линейной функции (111). 5. Параметры и инвариант линейного преобразования (112). 6. Отображение верхней полуплоскости на само себя (115). 7. Инвариантность пары взаимно симметричных точек при линейном преобразовании (116). 8. Отображение круга на верхнюю полуплоскость (117). 9. Отображение круга самого в себя (117). 10. Представление линейного преобразования посредством симметричных отображений (118). 11. Различные типы линейных преобразований (119). 12. Природа двойных точек (123). 13. Геометрическая интерпретация эллиптического преобразования (125). 14. Характер преобразования круга самого в себя (125).	
§ 2. Линейные преобразования и геометрия Лобачевского	127
1. Евклидово изображение геометрии Лобачевского в круге (127). 2. Вычисление неевклидова расстояния двух точек с данными аффиксами (128). 3. Неевклидова окружность (129). 4. Неевклидова длина кривой (129). 5. Неевклидова площадь (130). 6. Горизонталы (130). 7. Гиперциклы (130). 8. Евклидово изображение геометрии Лобачевского на полуплоскости (131). 9. Неевклидова длина окружности (132). 10. Угол параллелизма в геометрии Лобачевского (133). 11. Неевклидовы площади круга и треугольника (134).	

§ 3. Некоторые элементарные функции и отображения, даваемые ими	135
1. Степенная функция и радикал (135). 2. Показательная и логарифмическая функции (138).	
Упражнения к гл. III	141

ГЛАВА IV

ТЕОРЕМА КОШИ. ИНТЕГРАЛ КОШИ

§ 1. Интегралы по комплексному переменному	143
1. Понятие интеграла по комплексному переменному (143). 2. Основные свойства интеграла по комплексному переменному (145). 3. Интегрирование равномерно сходящегося ряда (146). 4. Теорема Коши (148).	
§ 2. Теорема Коши	149
1. Основная лемма (149). 2. Приведение доказательства теоремы Коши к простейшему случаю (151). 3. Доказательство теоремы Коши (152). 4. Понятие неопределенного интеграла в комплексной области (155). 5. Распространение теоремы Коши на случай сложных контуров (158). 6. Логарифмическая функция (160). 7. Лемма (163). 8. Обобщение теоремы Коши (164).	
§ 3. Интеграл Коши	166
1. Формула Коши (166). 2. Распространение формулы Коши на случай сложных контуров (168). 3. Интеграл типа Коши (169). 4. Существование производных всех порядков для функции, аналитической в области (172). 5. Теорема Морера (173). 6. Различные точки зрения в построении теории аналитических функций (173). 7. О предельных значениях интеграла типа Коши (174). 8. О предельных значениях интеграла типа Коши в случае, когда граничная функция удовлетворяет условию Гельдера — Липшица (179). 9. Интеграл Пуассона (185).	
Упражнения к гл. IV	188

ГЛАВА V

РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, РАЗЛОЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В СТЕПЕННОЙ РЯД

§ 1. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций	190
1. Первая теорема Вейерштрасса (190).	
§ 2. Ряд Тейлора	195
1. Приложение теоремы Вейерштрасса к степенным рядам (195). 2. Разложение аналитической функции в степенной ряд (196). 3. Понятие голоморфной функции и его эквивалентность с понятием аналитической функции (199). 4. Свойство единственности аналитических функций (200). 5. Принцип максимального модуля (203). 6. Нули аналитической функции (206). 7. Порядок нуля (207). 8. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда (207). 9. Теорема Лиувилля (208). 10. Вторая теорема Вейерштрасса (208).	
Упражнения к гл. V	209

ГЛАВА VI

ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Ряд Лорана	211
1. Разложение аналитической функции в ряд Лорана (211). 2. Правильная и главная части ряда Лорана (213). 3. Единственность разложения Лорана (214).	

§ 2. Классификация особых точек однозначной функции	215
1. Три типа изолированных особых точек (215). 2. Устранимая особая точка (215). 3. Полус (216). 4. Связь между нулем и полюсом (217). 5. Существенно особая точка (218). 6. Поведение функции в окрестности изолированной особой точки (220).	
§ 3. Поведение аналитической функции в бесконечности	221
1. Окрестность бесконечно удаленной точки (221). 2. Разложение Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки (222). 3. Поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки (223). 4. Условия обращения интеграла типа Коши в интеграл Коши (224).	
§ 4. Простейшие классы аналитических функций	224
1. Целые функции (224). 2. Мероморфные функции (226). 3. Разложение рациональной функции на простейшие дроби (227). 4. Основная теорема алгебры (227).	
§ 5. Приложения к гидродинамике	227
1. Невихревой и свободный от источников поток жидкости (227). 2. Характеристическая функция потока (229). 3. Обтекание круглого цилиндра потоком без циркуляции (230). 4. Чисто циркулярный поток (232). 5. Общий случай (233).	
Упражнения к гл. VI	234

Г Л А В А VII

ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ

§ 1. Общая теория вычетов	237
1. Вычет функции относительно изолированной особой точки (237). 2. Основная теорема о вычетах (238). 3. Вычисление вычета функции относительно полюса (239). 4. Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки (240). 5. Вычисление интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ (242).	
§ 2. Приложения теории вычетов	244
1. Основная теорема алгебры (244). 2. Теорема Руше (245). 3. Приложения теории вычетов к вычислению определенных интегралов (246). Разложение $\operatorname{ctg} z$ на простейшие дроби (251).	
Упражнения к гл. VII	255

Г Л А В А VIII

ТЕОРЕМА ПИКАРА

§ 1. Предложение Блоха	256
1. Теорема об обращении голоморфной функции (256). 2. Доказательство предложения Блоха (257).	
§ 2. Теорема Ландау	259
1. Доказательство теоремы Ландау (259). 2. Малая теорема Пикара (260).	
§ 3. Неравенство Шоттки	261
1. Вывод неравенства Шоттки (261). 2. Обобщенное неравенство Шоттки (262).	
§ 4. Общая теорема Пикара	263
Упражнения к гл. VIII	264

ГЛАВА IX

БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ ИХ
К АНАЛИТИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

§ 1. Бесконечные произведения	265
1. Сходящиеся и расходящиеся бесконечные произведения (265).	
2. Основной критерий сходимости бесконечного произведения (266).	
3. Изображение голоморфной функции в виде бесконечного произведения (270).	
§ 2. Приложения бесконечных произведений к теории целых функций	271
1. Формула Вейерштрасса (271). 2. Изображение целой функции в виде бесконечного произведения (274). 3. Изображение мероморфной функции в виде отношения двух целых функций (276). 4. Задача Миттаг-Леффлера (277).	
§ 3. Обобщение теоремы единственности аналитических функций.	278
1. Возможные обобщения теоремы единственности аналитических функций (278). 2. Формула Якоби и Иенсена (279). 3. Доказательство теоремы единственности (281). 4. Невозможность дальнейшего обобщения теоремы единственности для ограниченных функций (282).	
Упражнения к гл. IX.	283

ГЛАВА X

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

§ 1. Принцип аналитического продолжения.	285
1. Понятие аналитического продолжения (285). 2. Понятие полной аналитической функции в смысле Вейерштрасса (286). 3. Распространение функции действительного переменного на комплексную область по принципу аналитического продолжения (290).	
§ 2. Примеры	290
1. Примеры однозначных функций (290). 2. Примеры многозначных функций (291).	
Упражнения к гл. X	293

ГЛАВА XI

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Общие свойства эллиптических функций	294
1. Определение эллиптической функции (294). 2. Параллелограммы периодов (295). 3. Основные теоремы (296). 4. Эллиптические функции второго порядка (301).	
§ 2. Функции Вейерштрасса	303
1. Лемма (304). 2. Функции σ , ζ и \wp (304).	
§ 3. Простейшие аналитические представления произвольной эллиптической функции	311
1. Представление эллиптической функции в виде суммы простейших элементов (311). 2. Представление эллиптической функции в виде отношения произведений элементарных множителей (313).	
§ 4. Функции σ_k	314
§ 5. Эллиптические функции Якоби	317
§ 6. Функции θ	319
1. Разложение целой периодической функции (319). 2. Функция θ (320). 3. Функции θ_k (323). 4. Свойства функций θ (326).	

§ 7. Представление эллиптических функций Якоби посредством функций тэта	330
§ 8. Формулы сложения для эллиптических функций Якоби.	331
Упражнения к гл. XI.	333

Г Л А В А XII

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Условия, определяющие конформное отображение	336
1. Отображение единичного круга самого на себя (336). 2. Условия, определяющие единственность конформного отображения (338).	
§ 2. Основные принципы теории конформного отображения	339
1. Принцип сохранения области (339). 2. Принцип взаимно однозначного соответствия (344). 3. Принцип симметрии Римана — Шварца (345). 4. Обобщение принципа симметрии (350). 5. Принцип Шварца аналитического продолжения (351). 6. Принцип симметрии для гармонической функции (352). 7. Приложение принципа симметрии (354).	
§ 3. Общие преобразования единичного круга во внутреннюю область	355
1. Аналитическое выражение голоморфной функции, преобразующей круг $ z < 1$ во внутреннюю область (355). 2. Лемма Шварца (358). 3. Приложение леммы Шварца к оценке производной функции, удовлетворяющей условиям леммы (360). 4. Общая форма леммы Шварца (361). 5. Существование двойной точки преобразования (362).	
§ 4. Единственность аналитических функций	363
1. Однозначное определение аналитической функции по ее граничным значениям (363). 2. Обобщение теоремы единственности (364).	
§ 5. Конформные отображения на верхнюю полуплоскость областей, ограниченных линиями второго порядка	365
1. Равносторонняя гипербола (365). 2. Парабола (367). 3. Гипербола и эллипс (371). 4. Отображение внутренности эллипса на полуплоскость (375).	
§ 6. Конформное отображение односвязных областей.	376
1. Упрощение постановки теоремы Римана (378). 2. Вспомогательная функция и ее основные свойства (379). 3. Основная лемма (380). 4. Доказательство предложения Римана (381).	
§ 7. Соответствие границ при конформном отображении.	383
1. Постановка задачи (385). 2. Доказательство предложения о соответствии границ (386).	
§ 8. Отображение прямоугольника и произвольного многоугольника на верхнюю полуплоскость	389
1. Прямоугольник (389). 2. Эллиптическая функция Якоби (393). 3. Многоугольник (395). 4. Треугольник (400). 5. Отображение внешней области многоугольника на верхнюю полуплоскость (404). . .	
Упражнения к гл. XII.	405

Г Л А В А XIII

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Проблема коэффициентов	407
1. Внутренняя теорема площадей (408). 2. Внешняя теорема площадей (410). 3. Верхняя граница для модуля коэффициента при z^2 в разложении однолистной функции (411). 4. Константа Кебе (412). 5. Теорема искажения (412). 6. Границы для модуля одностистой функции (413). 7. Теорема вращения (415). 8. Общая граница для модулей	

коэффициентов в разложении однолистной функции (416). 9. Общая граница для модулей действительных коэффициентов в разложении однолистной функции (417).	
§ 2. Границы выпуклости и звездообразности	418
1. Граница выпуклости (418). 2. Граница звездообразности (419).	
§ 3. Свойства функций, дающих однолистные конформные отображения единичного круга на области специального вида	420
1. Звездообразные и выпуклые функции (420). 2. Верхние границы модулей коэффициентов в разложениях выпуклой и звездообразной функций (421).	
§ 4. Экстремальные свойства функции, отображающей область на круг	423
1. Лемма (423). 2. Первая экстремальная проблема (425). 3. Вторая экстремальная проблема (426).	
Предметный указатель	429