

**НЕЛИНЕЙНАЯ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ
МЕХАНИКА ПРОЧНОСТИ**

Том I

В.А. Левин

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ



Том I

В.А. Левин

**МОДЕЛИ И МЕТОДЫ
ОБРАЗОВАНИЕ
И РАЗВИТИЕ ДЕФЕКТОВ**

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2015

УДК 539.4, 519.6

ББК 22.2

Л36

Левин В.А. **Модели и методы. Образование и развитие дефектов.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 456 с. (**Нелинейная вычислительная механика прочности** / Под общ. ред. В.А. Левина: В 5 т. Т. I). — ISBN 978-5-9221-1570-4 (Т. I).

Пятитомный цикл монографий посвящен изложению моделей и методов для решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела с упором на задачи при больших деформациях и их наложении, а также разработке систем прочностного инженерного анализа (прочностных САЕ).

В томе I описаны востребованные при промышленном проектировании механические модели и математические постановки задач, в которых при нагружении изменяются границы и граничные условия, свойства части материала тела, происходит изменение массы тела. Приведены решения задач: о развитии в нагруженном теле дефектов с учетом эволюции зон предразрушения; о принудительном изменении формы и массы тела при нагружении; о твердотельных фазовых переходах при больших деформациях с учетом теории Гинзбурга—Ландау. Кратко изложены численные методы, используемые для решения задач в промышленных САЕ: конечного элемента, спектрального элемента, разрывный метод Галёркина, а также подходы для приближенного аналитического решения задач наложения больших деформаций.

Для научных работников, разработчиков систем прочностного инженерного анализа, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, занимающихся механикой деформируемого твердого тела, теорией прочности, численными методами.

Печатается по рекомендации Бюро отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук.

ISBN 978-5-9221-1570-4 (Т. I)

ISBN 978-5-9221-1578-0

© ФИЗМАТЛИТ, 2015

© В. А. Левин, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие академика Г.И. Марчука	6
Предисловие к пятитомному изданию	9
Введение	18
§ 0.1. Отличие задач механики разрушения при конечных деформациях и их перераспределении от задач при малых деформациях	18
§ 0.2. Расширение круга задач, разрешимых благодаря учету конечности деформаций и их наложения	31
Глава 1. Модели	34
§ 1.1. Основные проблемы «приближенного» решения задач при конечных деформациях и их наложении (перераспределении)	34
§ 1.2. Примеры моделей и постановок задач о перераспределении конечных деформаций	37
§ 1.3. Общий подход к построению моделей возникновения или развития дефекта в нагруженном теле	47
1.3.1. Общий подход к построению модели возникновения и развития дефекта на примере задачи о трещине ненулевого раскрытия	47
1.3.2. Упрощения постановки задачи в предположении малости деформаций и ее непригодность в общем случае	49
1.3.3. Некоторые особенности задания граничных условий при конечных деформациях. Моменты нагружения	50
1.3.4. Возможные подходы к моделированию формы дефекта, имеющегося в теле или привносимого в нагруженное тело. Физический разрез	53
§ 1.4. Варианты и специфика постановки задачи о возникновении или развитии дефекта в нагруженном теле	55
1.4.1. Существование дефекта в теле до начала нагружения. Два основных варианта постановки задачи	55
1.4.2. Принудительное образование дефекта в нагруженном теле	59

§ 1.5. Модели образования включений в нагруженном теле	61
1.5.1. Образование включения в нагруженном теле	61
1.5.2. Обобщение задачи Ламе–Гадолина	63
§ 1.6. Понятие зоны предразрушения. Рост дефекта с образованием зон предразрушения. Учет эффекта наклепа для берегов трещины.	67
§ 1.7. Модели для описания поведения тел из материалов, изменяющих свои механические свойства при нагружении. Конечные деформации	71
§ 1.8. Специфика постановки задачи для эластомеров (полимеров в высокоэластичном состоянии)	76
1.8.1. Модель «мгновенного» образования и дискретного развития в теле при нагружении области с новыми свойствами	81
1.8.2. Модель непрерывного развития в теле при нагружении области с новыми свойствами	86
§ 1.9. Модели для описания деформирования и разрушения наноматериалов. Задача о дефекте в наноструктурированных материалах.	87
§ 1.10. Вязкий рост дефекта (на примере трещины ненулевого раскрытия)	92
§ 1.11. Общий подход к алгоритму решения задачи о вязком росте дефекта (на примере трещины ненулевого раскрытия)	95
§ 1.12. Модельная задача о разгрузке тела после образования в нем зоны предразрушения.	102
§ 1.13. Вариант модели развития поврежденности вблизи дефекта при конечных деформациях и их перераспределении.	105
§ 1.14. Особенности модели при учете пластичности в рамках механики деформируемого твердого тела	108
§ 1.15. Модели и проблемы при постановке и решении динамических задач. Задача о распаде разрыва с учетом перераспределения конечных деформаций	110
§ 1.16. Метод оценки эффективных свойств пористых материалов при конечных деформациях и их наложении	112
§ 1.17. Модели прочности для проектируемых материалов с заданными свойствами и алгоритм прочностного анализа	115
§ 1.18. О постановке задач устойчивости для поэтапного нагружения тел при конечных деформациях	116
Глава 2. Основные соотношения теории многократного наложения больших деформаций	118
§ 2.1. Основные соотношения и понятия нелинейной теории упругости и вязкоупругости	118
2.1.1. Основные термины и обозначения (справочный формат)	118
2.1.2. Кинематика	119
2.1.3. Уравнения движения и граничные условия	125
2.1.4. Определяющие соотношения	127

2.1.5. Постановка задач о концентрации напряжений при больших деформациях	131
2.1.6. Плоская деформация и плосконапряженное состояние	133
§ 2.2. Основные соотношения и определения теории многократного наложения больших деформаций	135
2.2.1. Основные термины и обозначения теории многократного наложения больших деформаций	135
2.2.2. Кинематика деформаций	137
2.2.3. Представление определяющих соотношений для упругого материала в пространствах различных состояний	144
2.2.4. Уравнения движения и граничные условия	155
2.2.5. О постановке граничных задач многократного наложения больших деформаций	160
Глава 3. Выбор критерия прочности при конечных деформациях и их наложении	166
§ 3.1. Подход к выбору критерия прочности при конечных деформациях и их наложении.	166
§ 3.2. Сводка некоторых критериев прочности.	171
§ 3.3. Нелокальный критерий прочности при конечных деформациях и их наложении для тел из упругих и вязкоупругих материалов.	176
§ 3.4. Нелокальные критерии для определения зоны предразрушения в нелинейно-упругих и вязкоупругих телах	179
§ 3.5. О формулировке комбинированного нелокального критерия прочности при конечных деформациях	185
Глава 4. Приближенные аналитические и численно-аналитические методы.	187
§ 4.1. Метод Синьорини на примере задач о перераспределении деформаций при изменении границ	189
§ 4.2. Решение линеаризованной плоской задачи теории упругости.	197
§ 4.3. Метод Ньютона–Канторовича и его применение к решению задач нелинейной упругости и теории наложения больших деформаций	199
§ 4.4. Примеры решения плоских задач и анализ результатов	209
§ 4.5. Задача о вертикальной скважине (изотропный упругий материал)	233
§ 4.6. Эффективные свойства пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении	238
Глава 5. Метод конечных элементов. Применение к задачам МДГТ	251
§ 5.1. Основы метода конечных элементов	251
5.1.1. Основная концепция	251

5.1.2. Разбиение области на элементы. Примеры различных подходов. Двумерный и трехмерный случаи	253
5.1.3. Способы организации структур для хранения параметров элементов	260
5.1.4. Интерполирование скалярных и векторных величин. Типы симплекс-элементов	261
§ 5.2. Применение МКЭ для задач теории упругости	267
5.2.1. Методы невязок. Метод Галёркина	267
5.2.2. Сведение уравнений теории упругости к уравнениям МКЭ	269
5.2.3. Локальная и глобальная матрицы жесткости	272
5.2.4. Граничные условия	274
5.2.5. Конечные деформации	275
5.2.6. Метод Ньютона. Модифицированный метод Ньютона	277
5.2.7. Нахождение результатов. Согласованные результаты элемента. Сглаживание напряжений	278
5.2.8. Несжимаемые материалы. Смешанная постановка. Решение на разнесенных сетках	280
§ 5.3. Модификации МКЭ. Обзор современных методов	281
5.3.1. Метод спектральных элементов	281
Слабая формулировка (281). Квадратуры Гаусса (283). Метод спектральных элементов (286). Выбор численного метода. Сравнение МКЭ и МСЭ (288). Неотражающие граничные условия (в задачах о распространении волны в бесконечной среде) (291).	
5.3.2. Разрывный метод Галёркина	294
Основные обозначения (295). Основные идеи разрывного метода Галёркина (296). Двумерная задача: неструктурированная треугольная сетка (302). Свойство тензоризации (309). Метод штрафов (315).	
Глава 6. Избранные задачи теории многократного наложения больших деформаций	318
§ 6.1. Твердотельные фазовые переходы под действием механических напряжений. Модель с использованием подхода Ландау–Гинзбурга	319
§ 6.2. Наноструктурированные материалы. Эффективные свойства. Поверхностный слой. Микронапряжения	329
§ 6.3. Развитие эллипсоидальной трещины с учетом возникновения и развития зон предразрушения	332
§ 6.4. Взаимодействие трещины гидроразрыва с трещиной геораздела слоев («спящая» трещина)	335
§ 6.5. Изменение напряженно-деформированного состояния нагруженного тела при статическом образовании в нем дефектов	338
6.5.1. Пространственная задача о последовательном образовании слоистого включения в нагруженном теле	338

6.5.2. Образование включения в нагруженном теле с последующей разгрузкой. Образование включения «с натягом»	341
6.5.3. Последовательное образование двух эллипсоидальных включений в нагруженном теле	343
6.5.4. Взаимодействие и взаимовлияние близкорасположенных микропор, пор и дефектов	345
§ 6.6. Динамические задачи теории многократного наложения больших деформаций	360
6.6.1. Плоская задача о распаде разрыва. Образование зоны предразрушения с учетом собственных деформаций	360
6.6.2. Задачи об одновременном и последовательном образовании полостей в нагруженном теле	367
6.6.3. Задача о последовательном образовании полостей и включений в нагруженном теле	371
§ 6.7. Образование в теле с большими начальными деформациями отверстия, форма которого должна стать заданной после образования . .	377
Приложение. Вязкоупругие задачи. Интегралы свертки. Метод Прони	381
Список литературы	385