

Г. В. Горп

ИНВАРИАНТНЫЕ
СООТНОШЕНИЯ
УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ
ТВЕРДОГО ТЕЛА

ТЕОРИЯ, РЕЗУЛЬТАТЫ, КОММЕНТАРИИ



Г.В. Горр

**ИНВАРИАНТНЫЕ
СООТНОШЕНИЯ
УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ
ТВЕРДОГО ТЕЛА**

ТЕОРИЯ, РЕЗУЛЬТАТЫ, КОММЕНТАРИИ



Москва ♦ Ижевск

2017

УДК 531.381; 531.391

ББК 213.3

Г67

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор А.П. Маркеев,

доктор физ.-мат. наук А.В. Мазнев

Рекомендовано к печати ученым советом ГУ «Институт прикладной математики и механики»

Горп Г.В.

Г67 Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). — М.—Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2017. — 424 с.

ISBN 978-5-4344-0406-8

В книге дано изложение теории и результатов, посвященных исследованию инвариантных соотношений уравнений динамики твердого тела. Выполнен анализ различных определений инвариантных соотношений обыкновенных дифференциальных уравнений и рассмотрено содержание опубликованных работ.

Предложены новые подходы в изучении инвариантных соотношений и частных решений уравнений Гриоли и Кирхгофа, предложена классификация инвариантных соотношений уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Книга предназначена для научных работников в области математики и механики, для студентов старших курсов и аспирантов.

ББК 213.3

ISBN 978-5-4344-0406-8

© Г.В. Горп, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Глава 1. ОБЩИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В МЕТОДЕ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1	Метод ИС Т. Леви-Чивиты	16
1.1.1	Определение ИС	16
1.1.2	Комментарий к статье [258]	20
1.1.3	Определение системы ИС	29
1.1.4	Связь ИС с инвариантным множеством	30
1.2	Интегрирование уравнений, допускающих первые интегралы и ИС класса Т. Леви-Чивиты	31
1.2.1	О теореме Якоби	32
1.2.2	Случай $n - 3$ первых интегралов и одного ИС по Т. Леви-Чивите	34
1.2.3	Интегрирование уравнений при наличии у них $n - 4$ первых интегралов и двух ИС по Леви-Чивите	36
1.2.4	Интегрирование уравнений на ИС С.А. Чаплыгина	40
1.3	Метод инвариантных соотношений П.В. Харламова	42
1.3.1	Определение. Теорема об ИС	43

1.3.2	Комментарии к понятию “слоя” ИС	46
1.4	Метод инвариантных соотношений неавтономных дифференциальных уравнений	52
1.4.1	Постановка задачи	53
1.4.2	Условие инвариантности соотношения (1.83)	56
1.4.3	Основная теорема	58
1.5	Выводы	61

Глава 2. ИНВАРИАНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА УРАВНЕНИЙ Д. ГРИОЛИ

2.1	Уравнение Д. Гриоли	64
2.2	Уравнение М.П. Харламова	65
2.3	Комментарий к п.п. 2.1, 2.2	66
2.4	Скалярные уравнения Д. Гриоли	68
2.5	Прямая и обратная задачи интегрирования уравне- ний (2.7)–(2.10)	69
2.6	Основной предмет исследования	71
2.7	О статье [179]	73
2.8	Комментарий к статье [179]	77
2.9	Анализ пункта 1.2 статьи [283]	81
2.10	Анализ пункта 1.3 статьи [283]	83
2.11	Анализ пункта 5 статьи [144]	87
2.12	Формулировка основного результата исследования ИС уравнений Гриоли с использованием первых ин- тегралов	89
2.13	Выводы	91

Глава 3. ИНВАРИАНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ В УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1 Условия существования одного ИС первого типа уравнений Д. Гриоли	95
3.2 Интегрирование уравнений (3.16), (3.17) с учетом первых интегралов (3.18)	100
3.3 Интегрирование уравнений Кирхгофа–Пуассона на линейном инвариантном соотношении	103
3.4 Комментарий к изучению линейного ИС в динамике твердого тела	115
3.5 Два линейных ИС уравнений Д. Гриоли	120
3.6 Два линейных ИС уравнений Кирхгофа–Пуассона .	129
3.7 Выводы	132

Глава 4. ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1 Условия существования частных решений уравнений Д. Гриоли	134
4.2 Решения уравнений Д. Гриоли, описывающие изоконические движения твердого тела, с программным ИС первого типа	149
4.3 Примеры изоконических движений с ИС второго типа в задаче о движении тяжелого твердого тела .	155
4.3.1 Решение В.А. Стеклова	155
4.3.2 Решение Д. Гриоли [327]	158
4.3.3 Анализ результатов и публикаций, посвященных изучению изоконических движений твердого тела	159

4.3.4	Метод исследования изоконических движений, характеризующихся ИС второго типа	165
4.4	Прецессионные движения тела, имеющего неподвижную точку	167
4.5	Комментарии к статье [145]	176
4.6	Выводы	191

Глава 5. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ НА ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ

5.1	Первый интеграл уравнений Эйлера–Пуассона, указанный С.А. Чаплыгиным [297]	193
5.2	Условия существования первого интеграла на инвариантных соотношениях	195
5.3	Дробно-линейный первый интеграл уравнений Пуассона на трех линейных ИС	198
5.4	Типы первых интегралов на трех линейных ИС уравнений Кирхгофа–Пуассона	206
5.5	Параметрический метод нахождения первых интегралов на ИС, описывающих прецессии гиростата	210
5.5.1	Регулярные прецессии гиростата относительно наклонной оси	210
5.5.2	Регулярные прецессии гиростата относительно вертикали	213
5.5.3	Полурегулярные прецессии гиростата первого типа относительно вертикали	216
5.6	Некоторые классы первых интегралов уравнений движения гиростата, несущего вращающийся ротор	219
5.6.1	Введение	219
5.6.2	Первые интегралы уравнений Пуассона на двух линейных ИС уравнений Кирхгофа–Пуассона в случае линейного подвижного годографа угловой скорости	220

5.6.3 Первые интегралы уравнений Пуассона на двух линейных ИС общего вида уравнений Кирхгофа-Пуассона	230
5.7 Выводы	242

Глава 6. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИС ДЛЯ НЕАВ- ТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВ- НЕНИЙ В СЛУЧАЕ ПРЕЦЕССИЙ ГИРОСТАТА, НЕСУЩЕГО ДВА РОТОРА

6.1 Постановка задачи. Уравнения движения для пре- цессий	244
6.2 Равномерные вращения тяжелого гиростата	249
6.3 Равномерные вращения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил	252
6.4 Маятниковые движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил	260
6.5 Полурегулярные прецессии гиростата, несущего два ротора	269
6.5.1 Случай $\gamma_3 = 1, a_0 = 0$	269
6.5.2 Случай сферического распределения масс тяжелого гиростата с неподвижным центром тяжести	273
6.5.3 Случай динамической симметрии тяжелого гиростата	275
6.5.4 Случай $\gamma_3 = 1, B_{ij} = 0, C_{ij} = 0$ ($i, j = \overline{1,3}$)	276
6.5.5 О первых интегралах уравнений (6.1), (6.2) на ИС для прецессионных движений	280
6.5.6 Регулярная прецессия в случаях $\gamma_3 = 1,$ $a_0 \neq 0$	285
6.5.7 Пример существования прецессии тяжелого гиростата в случае $m = 0, \gamma_3 = 0$	289

6.5.8	Пример существования регулярной прецессии тяжелого гиростата в случае $\gamma_3 = 0$	292
6.6	Выводы	294

Глава 7. КЛАССИФИКАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА

7.1	Классификация первых интегралов	297
7.1.1	Интеграл Н.Е. Жуковского	297
7.1.2	Интеграл Ж.Л. Лагранжа	298
7.1.3	Интеграл Х.М. Яхьи	299
7.2	Решение Л.Н. Сретенского уравнений движения гиростата с ИС первого типа (обобщение решения Гесса)	300
7.3	Решение Л.Н. Сретенского при условиях Горячева–Чаплыгина (обобщение решения С.А. Чаплыгина)	302
7.4	Стационарные решения уравнений движения тяжелого гиростата (первое решение П.В. Харламова)	303
7.5	Два линейных инвариантных соотношения уравнений движения тяжелого гиростата (второе решение П.В. Харламова)	305
7.6	Одно линейное ИС второго типа уравнений движения тяжелого гиростата	307
7.6.1	Первое решение с линейным ИС (обобщение решения Д. Гриоли)	308
7.6.2	Второе решение с линейным ИС (решение Е.И. Харламовой)	311
7.7	Квадратичные инвариантные соотношения уравнений движения гиростата, центр масс которого лежит на главной оси (первый класс)	313
7.7.1	Случай $\varepsilon_4 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$ (третье решение П.В. Харламова – обобщение решения В.А. Стеклова)	313

7.7.2	Случай $\varepsilon_4 = 0$ (четвертое решение П.В. Харламова – обобщение решения Н. Ковалевского)	315
7.7.3	Случай $\varepsilon_4 \neq 0$ (решение Д.Н. Горячева)	318
7.8	Квадратичные инвариантные соотношения уравнений движения гиростата, центр масс которого лежит на главной оси (второй класс)	320
7.8.1	Решение А.И. Докшевича	320
7.8.2	Решение Е.И. Харламовой–П.В. Харламова (обобщение решения П.В. Харламова–Л.М. Ковалевой)	321
7.8.3	Пятое решение П.В. Харламова (при условиях С.В. Ковалевской)	322
7.9	Квадратичное инвариантное соотношение уравнений движения гиростата, центр масс которого лежит в главной плоскости эллипсоида инерции (решение Е.И. Харламовой – обобщение решения А.И. Докшевича)	323
7.10	Алгебраические инвариантные соотношения уравнений движения гиростата, имеющие порядок выше второго	325
7.10.1	Решение Г.В. Мозалевской	325
7.10.2	Первое решение Е.И. Харламовой–Г.В. Мозалевской уравнений движения гиростата в тригонометрической форме	326
7.10.3	Второе решение Е.И. Харламовой–Г.В. Мозалевской уравнений движения гиростата в тригонометрической форме	327
7.10.4	Третье решение Е.И. Харламовой–Г.В. Мозалевской уравнений движения гиростата в экспоненциальных функциях	328
7.11	Об инвариантных соотношениях двух решений уравнений Эйлера–Пуассона специального вида	329

7.11.1 Решение С.А. Чаплыгина [295]	329
7.11.2 Решение А.И. Докшевича [96]	330
7.12 Классификация ИС в решениях уравнений движе- ния тяжелого гиростата	330
7.13 Комментарий к общей классификации решений уравнений движения гиростата	340

Глава 8. КЛАССИФИКАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА– ПУАССОНА

8.1 Общие случаи интегрируемости	347
8.1.1 Случай Г. Кирхгофа [340] (обобщен П.В. Хар- ламовым [237])	349
8.1.2 Предельный случай А. Клебша [311–313]	349
8.1.3 Случай А. Клебша [311–313]	349
8.1.4 Случай В.А. Стеклова [206] (обобщен П.В. Харламовым [237] и В.Н. Рубановским [187, 188])	350
8.1.5 Случай А.М. Ляпунова [147] (обобщен П.В. Харламовым [249] и В.Н. Рубановским [187, 190])	351
8.1.6 Интеграл В.В. Соколова [199]	351
8.2 Случай интегрируемости уравнений Кирхгофа– Пуассона с фиксированной постоянной в первом ин- теграле	352
8.3 Полиномиальные решения уравнений Кирхгофа– Пуассона класса Стеклова–Ковалевского–Горячева	353
8.3.1 Первое решение	354
8.3.2 Второе решение	355
8.3.3 Третье решение [59]	357
8.3.4 Выводы	359

8.4 Инвариантные соотношения решений уравнений Кирхгофа–Пуассона в классе функций $x_i = x_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$	360
8.4.1 Три линейных соотношения по переменным x_i, ν_i ($i = \overline{1, 3}$)	360
8.4.2 Два линейных соотношения по переменным x_i, ν_i ($i = \overline{1, 3}$)	362
8.4.3 Одно линейное соотношение по основным переменным	364
8.4.4 Пример полиномиальных ИС четвертого порядка	365
8.4.5 Пример полиномиальных ИС восьмого порядка	366
8.5 Инвариантные соотношения для прецессионных движений гиростата	367
8.5.1 Регулярные прецессии	368
8.5.2 Полурегулярные прецессии первого типа	368
8.5.3 Полурегулярные прецессии второго типа	369
8.5.4 Прецессии общего вида	370
8.6 Выводы	372
Заключение	374
Литература	376