

76
ср. н.
74.

М. М. Постников

ТЕОРЕМА
ФЕРМА

М. М. Постников

ТЕОРЕМА ФЕРМА



*Введение в теорию
алгебраических
чисел*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1978

517.1
П63
УДК 511.52

АННОТАЦИЯ

Книга является введением в теорию алгебраических чисел. Основные понятия и идеи этой теории изложены в ней в связи с теоремой Ферма. Читатель должен видеть, что их появление не случайно, а диктуется логикой решения конкретной задачи. Одна из целей книги — убедить читателя в глубине и сложности проблематики, связанной с теоремой Ферма, и в полной бесперспективности поисков ее элементарного доказательства.

Изложение в книге ведется концентрически, с тем чтобы читатель, даже с минимальной подготовкой (например, школьник), мог усвоить основные идеи.

Книга предназначена школьникам старших классов (в ее первых главах), студентам, учителям и всем любителям математики. Она может быть интересна и более квалифицированным читателям, которые хотят познакомиться с теорией алгебраических чисел в ее классическом аспекте.

Михаил Михайлович Постников

ТЕОРЕМА ФЕРМА

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

М., 1978 г., 128 стр.

Редакторы *В. Л. Попов, В. В. Донченко*

Технический редактор *Е. В. Морозова*

Корректор *Н. Д. Дорохова*

ИБ № 11184

Сдано в набор 27.07.77. Подписано к печати 2.01.78. Бумага 84×108¹/₃₂ тип. № 3. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 6,72. Уч.-изд. л. 6,03. Тираж 50 000 экз. Цена книги 20 коп. Заказ № 702.

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы 117071. Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

П 20203—018
053(02)—78 75-78

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1978

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
История теоремы Ферма	7
Ферма и его работы по теории чисел. — Теорема Ферма. — Премия Вольфскеля и «ферматисты». — Замечание Грюнерта. — Эйлер, Ламе, Куммер. — Теоремы Куммера. — Теорема Вандивера. — Первый случай теоремы Ферма. — Жермен, Лежандр, Вендт. — Первый случай теоремы Ферма после Куммера.	
§ 1. Теорема Жермен	18
Предварительные замечания. — Лемма о произведении n -х степеней. — Формулы Абеля. — Сравнения. — Доказательство теоремы Жермен. — Следствия.	
§ 2. Теорема Ферма для показателя 4	27
Случай показателя 2. — Доказательство теоремы Ферма для показателя 4.	
§ 3. Теорема Ферма для показателя 3	31
Лемма Эйлера. — Вывод теоремы Ферма для показателя 3 из леммы Эйлера.	
§ 4. Арифметика кольца D_3	34
Эйлерово «доказательство» леммы. — Обсуждение. — Кольцо D_3 и поле K_3 . — Норма. — Единицы колец. — Простые элементы. — Разложение на простые множители. — Арифметика в кольцах. — Кольца главных идеалов. — Евклидовы кольца. — Алгоритм деления в кольце D_3 . — Доказательство леммы Эйлера.	
Приложение. Об арифметике многочленов 49	
Неприводимые многочлены. — Неприводимые многочлены и многочлены меньшей степени.	
§ 5. Поле K_f и кольцо D_f	50
Неприводимость многочлена деления круга. — Поле K_f . — Норма. — Кольцо D_f . — Число λ и его свойства.	
§ 6. Единицы кольца D_f	60
Корни из единицы, содержащиеся в кольце D_f . — Вещественные единицы — Лемма Куммера,	

§ 7. Первый случай теоремы Ферма 66

Вспомогательное утверждение. — Вывод первого случая теоремы Ферма из Вспомогательного утверждения. — Доказательство Вспомогательного утверждения в случае, когда в кольце D_1 выполнена основная теорема арифметики.

§ 8. Теория дивизоров 73

Свободные коммутативные моноиды. — Кольца, допускающие теорию дивизоров. — Дивизоры в кольцах с однозначным разложением на множители. — Классы дивизоров. — Регулярные простые числа. — Доказательство Вспомогательного утверждения для регулярных простых чисел.

§ 9. Второй случай теоремы Ферма 79

Предварительные замечания. — Доказательство теоремы Ферма для регулярных показателей.

§ 10. Теория идеалов 86

Примеры идеалов. — Идея Дедекинда. — Моноид идеалов. — Кольца, аддитивная группа которых является решеткой. — Кольца, алгебраически вкладываемые в поле C . — Конечность числа классов идеалов. — Целозамкнутые кольца. — Свойства идеалов. — Идеалы как дивизоры. — Необходимость условия целозамкнутости.

Приложение. Норма идеала 103

Сравнения по модулю идеала. — Сравнение по взаимно простым модулям. — Идеалы, порожденные двумя элементами. — Норма идеала. — Индекс. — Пересечение идеалов. — Мультипликативность нормы. — Норма главного идеала. — Критерий простоты идеала.

§ 11. Целые алгебраические числа 110

Поле алгебраических чисел и кольцо целых алгебраических чисел. — Поля конечной степени. — След. — Целозамкнутость кольца D_1 . — Дивизоры в произвольных полях алгебраических чисел.

§ 12. Регулярные простые числа 119

Первообразные корни. — Первый и второй множители числа классов. — Редукция ко второму множителю. — Числа Бернулли. — Критерий регулярности Куммера.