

ФМ

---

И. СОКОЛЬНИКОВ

Тензорный  
анализ

---

УДК 517.51

Физико-  
Математическая  
Библиотека  
Инженера

---

И. С. СОКОЛЬНИКОВ

# ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ  
В ГЕОМЕТРИИ И В МЕХАНИКЕ  
СПЛОШНЫХ СРЕД

Перевод с английского В. И. КОНТОВТА  
Под редакцией В. В. ЛОХИНА



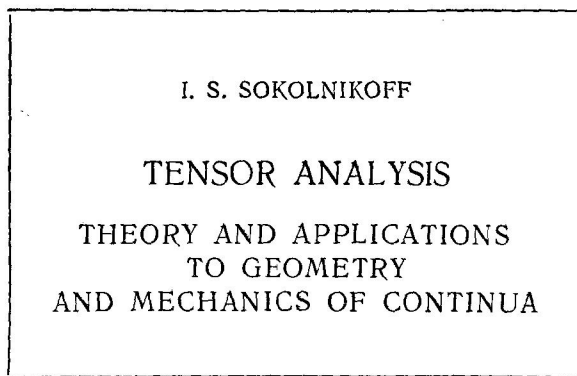
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1971

517.3.  
С 59  
УДК 512.972

**Тензорный анализ** (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). И. Сокольников, перев. с англ. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», Москва, 1971, 376 стр.

В основу книги положен курс лекций, читанных автором студентам старших курсов и аспирантам ряда североамериканских университетов. Книга может быть использована как учебное пособие впервые приступающими к изучению предмета и как справочник научными работниками и инженерами. Большая часть приложений тензорного анализа, рассматриваемых в книге, относится к аналитической механике и к механике сплошных сред. Последние главы книги представляют собой краткое введение в теорию относительности и механику деформируемых сред.

Рис. 53, библиограф. ссылок 82.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	7
Предисловие ко второму изданию . . . . .	9
Предисловие к первому изданию . . . . .	10
<b>Глава I. Линейные векторные пространства. Матрицы . . . . .</b>	<b>13</b>
§ 1. Координатные системы . . . . .	13
§ 2. Геометрическое понятие вектора . . . . .	16
§ 3. Линейные векторные пространства. Размерность пространства	18
§ 4. $N$ -мерные пространства . . . . .	21
§ 5. Линейные векторные пространства $n$ измерений . . . . .	23
§ 6. Комплексные линейные векторные пространства . . . . .	27
§ 7. Соглашение о суммировании. Детерминанты . . . . .	28
§ 8. Линейные преобразования и матрицы . . . . .	32
§ 9. Линейные преобразования в евклидовом трехмерном пространстве . . . . .	37
§ 10. Ортогональное преобразование в $E_3$ . . . . .	40
§ 11. Линейные преобразования в $n$ -мерных евклидовых пространствах . . . . .	41
§ 12. Приведение матриц к диагональной форме . . . . .	43
§ 13. Вещественные симметричные матрицы и квадратичные формы	47
§ 14. Примеры приведения квадратичных форм . . . . .	53
§ 15. Классификация и свойства вещественных квадратичных форм	57
§ 16. Одновременное приведение двух квадратичных форм к сумме квадратов . . . . .	58
§ 17. Унитарные преобразования и эрмитова матрица . . . . .	60
<b>Глава II. Теория тензоров . . . . .</b>	<b>63</b>
§ 18. Задача и содержание тензорного анализа. Инвариантность . . . . .	63
§ 19. Преобразование координат . . . . .	64
§ 20. Свойства допустимых преобразований координат . . . . .	66
§ 21. Преобразования, индуцированные инвариантностью . . . . .	67
§ 22. Ковариантные и контравариантные преобразования . . . . .	69
§ 23. Понятие тензора. Контравариантный и ковариантный тензоры	72
§ 24. Свойства ковариантного и контравариантного законов преобразования тензоров . . . . .	76

§ 25. Алгебра тензоров . . . . .	78
§ 26. Правило частного . . . . .	81
§ 27. Симметричные и коссимметричные тензоры . . . . .	84
§ 28. Относительные тензоры . . . . .	85
§ 29. Метрический тензор . . . . .	87
§ 30. Фундаментальный тензор и ассоциированные с ним тензоры . . . . .	89
§ 31. Символы Кристоффеля . . . . .	91
§ 32. Преобразование символов Кристоффеля . . . . .	95
§ 33. Ковариантное дифференцирование тензоров . . . . .	97
§ 34. Формулы ковариантного дифференцирования . . . . .	100
§ 35. Теорема Риччи . . . . .	101
§ 36. Тензор Римана — Кристоффеля . . . . .	102
§ 37. Свойства тензоров Римана — Кристоффеля . . . . .	105
§ 38. Тензор Риччи. Тожества Бьянки. Тензор Эйнштейна . . . . .	107
§ 39. Пространства Римана и Евклида. Теорема существования . . . . .	108
§ 40. $\epsilon$ -системы и обобщенные дельты Кронекера . . . . .	113
§ 41. Применение $\epsilon$ -систем к детерминантам. Тензорный характер обобщенных дельт Кронекера . . . . .	118
<b>Глава III. Геометрия . . . . .</b>	<b>122</b>
§ 42. Неевклидовы геометрии . . . . .	122
§ 43. Длина дуги . . . . .	123
§ 44. Криволинейные координаты в $E_3$ . . . . .	130
§ 45. Взаимные базисные системы. Ковариантные и контравариантные векторы . . . . .	135
§ 46. О смысле ковариантных производных . . . . .	139
§ 47. Внутреннее дифференцирование . . . . .	142
§ 48. Параллельные векторные поля . . . . .	143
§ 49. Геометрия кривых в пространстве . . . . .	145
§ 50. Формулы Серре — Френе . . . . .	149
§ 51. Уравнения прямой линии . . . . .	152
§ 52. Криволинейные координаты на поверхности . . . . .	153
§ 53. Внутренняя геометрия. Первая фундаментальная квадратичная форма. Метрический тензор . . . . .	156
§ 54. Угол между двумя пересекающимися кривыми на поверхности. Элемент площади поверхности . . . . .	159
§ 55. Основные понятия вариационного исчисления . . . . .	162
§ 56. Уравнение Эйлера в простейшем случае . . . . .	165
§ 57. Уравнения Эйлера для функционала от нескольких аргументов . . . . .	168
§ 58. Геодезические линии в $R_n$ . . . . .	173
§ 59. Геодезические координаты . . . . .	178
§ 60. Параллельные векторные поля на поверхности . . . . .	180
§ 61. Изометрические поверхности . . . . .	182
§ 62. Тензор Римана — Кристоффеля и гауссова кривизна . . . . .	183
§ 63. Геодезическая кривизна поверхностных кривых . . . . .	186
§ 64. Поверхности в пространстве . . . . .	188

§ 65. Нормаль к поверхности . . . . .	192
§ 66. Тензорные производные . . . . .	194
§ 67. Вторая фундаментальная форма поверхности . . . . .	197
§ 68. Условия интегрируемости . . . . .	199
§ 69. Формулы Вейнгартена и уравнения Гаусса и Кодацци . . . . .	201
§ 70. Средняя и полная кривизна поверхности . . . . .	203
§ 71. Кривые на поверхности. Теорема Менье . . . . .	204
§ 72. Главные кривизны поверхности . . . . .	207
§ 73. Параллельные поверхности . . . . .	212
§ 74. Теорема Гаусса — Бонне . . . . .	215
§ 75. $n$ -мерные многообразия . . . . .	220
<b>Глава IV. Аналитическая механика . . . . .</b>	<b>223</b>
§ 76. Основные понятия. Кинематика . . . . .	223
§ 77. Законы Ньютона. Динамика . . . . .	225
§ 78. Уравнения движения частицы. Работа. Энергия . . . . .	227
§ 79. Уравнения движения Лагранжа . . . . .	230
§ 80. Применения уравнений Лагранжа . . . . .	232
§ 81. Определение вариации . . . . .	241
§ 82. Принцип Гамильтона . . . . .	243
§ 83. Интеграл энергии . . . . .	245
§ 84. Принцип наименьшего действия . . . . .	246
§ 85. Системы частиц. Обобщенные координаты . . . . .	250
§ 86. Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах . . . . .	253
§ 87. Виртуальная работа и обобщенные силы . . . . .	258
§ 88. Неголономные системы . . . . .	260
§ 89. Иллюстративные примеры . . . . .	266
§ 90. Канонические уравнения Гамильтона . . . . .	273
§ 91. Закон тяготения Ньютона . . . . .	277
§ 92. Теоремы преобразования интегралов . . . . .	281
§ 93. Теорема Гаусса. Решение уравнения Пуассона . . . . .	286
§ 94. Третье тождество Грина. Гармонические функции . . . . .	290
§ 95. Функции Грина и Неймана . . . . .	294
§ 96. Функции Грина для полубесконечного пространства и сферических областей . . . . .	297
§ 97. Задача двух тел . . . . .	300
<b>Глава V. Релятивистская механика . . . . .</b>	<b>305</b>
§ 98. Инвариантность физических законов . . . . .	305
§ 99. Частная или специальная теория относительности . . . . .	307
§ 100. Собственные или локальные координаты . . . . .	311
§ 101. Уравнение энергии Эйнштейна . . . . .	313
§ 102. Общая теория относительности. Возникновение и перспективы развития . . . . .	315
§ 103. Гравитационные уравнения Эйнштейна . . . . .	317
§ 104. Сферически-симметричное статическое поле . . . . .	319

§ 105. Орбиты планет . . . . .	323
§ 106. Смещение перигелия . . . . .	327
§ 107. Заключительные замечания . . . . .	330
<b>Глава VI. Механика сплошных сред . . . . .</b>	<b>332</b>
§ 108. Вводные замечания . . . . .	332
§ 109. Деформирование сплошной среды . . . . .	333
§ 110. Геометрическая интерпретация тензоров $E_0$ и $E$ . . . . .	336
§ 111. Квадрика деформаций. Главные деформации . . . . .	338
§ 112. Относительное изменение элементов объема . . . . .	341
§ 113. Перемещения в сплошных средах . . . . .	343
§ 114. Уравнения совместности . . . . .	345
§ 115. Анализ напряженного состояния . . . . .	347
§ 116. Дифференциальные уравнения равновесия . . . . .	349
§ 117. Виртуальная работа . . . . .	351
§ 118. Законы термодинамики . . . . .	355
§ 119. Упругие среды . . . . .	357
§ 120. Соотношения напряжение — деформация в изотропных упру- гих средах . . . . .	360
§ 121. Уравнения упругости . . . . .	362
§ 122. Гидромеханика. Уравнения неразрывности . . . . .	364
§ 123. Идеальные жидкости. Уравнения Эйлера . . . . .	366
§ 124. Вязкие жидкости. Уравнения Навье . . . . .	368
§ 125. Замечания о турбулентных течениях и диссипативных средах	372
<b>Библиография . . . . .</b>	<b>374</b>