

**А.Э. Джашитов,
Ю.В. Чеботаревский,
В.П. Глазков**

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**Основы теории,
алгоритмы решения задач
с визуализацией**



ИЛЕКСА

**А.Э. Джашитов, Ю.В. Чеботаревский,
В.П. Глазков**

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ,
АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
С ВИЗУАЛИЗАЦИЕЙ**

*Допущено
Поволжским региональным
учебно-методическим центром
Министерства образования и науки
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений
инженерно-технических специальностей
и направлений*

**Москва
ИЛЕКСА
2013**

УДК 531
ББК 22.21
Д40

Рецензенты:

Член-корреспондент РАН, д.т.н., профессор А.Ф. Резчиков,
д.п.н., профессор М.А. Евдокимов

Джашитов А. Э., Чеботаревский Ю. В., Глазков В. П.

Д40 Теоретическая механика. Основы теории, алгоритмы решения задач с визуализацией: Учеб. пособие для вузов. – М.: 2013 – 383 с., 212 ил.

ISBN 978-5-89237-367-8

В книге изложены теоретические основы курса «Теоретическая механика», представлены алгоритмы решения задач с многочисленными примерами их применения, снабженные комментариями, позволяющими понять порядок и смысл предлагаемых действий. К книге прилагается диск с визуализацией алгоритмов решения задач.

Учебное пособие предназначено для студентов технических высших учебных заведений, имеющих в своей программе курс «Теоретическая механика».

УДК 531
ББК 22.21

ISBN 978-5-89237-367-8

© Джашитов А.Э.,
Чеботаревский Ю.В.,
Глазков В.П., 2013
© ИЛЕКСА, 2013

Оглавление

Введение

1. Введение в теоретическую механику.....	14
2. Обозначения.....	16

Часть 1. Кинематика

Введение в кинематику.....	19
Глава 1. Кинематика МТ.....	21
1.1. Векторный способ задания движения МТ.....	21
1.1.1. Уравнение движения МТ.....	21
1.1.2. Траектория МТ.....	21
1.1.3. Скорость МТ.....	21
1.1.4. Ускорение МТ.....	22
1.2. Координатный декартовый способ задания движения МТ.....	23
1.2.1. Уравнения движения МТ.....	23
1.2.2. Связь между векторным и координатным декартовым способами задания движения МТ.....	23
1.2.3. Траектория МТ.....	23
1.2.4. Скорость МТ.....	24
1.2.5. Ускорение МТ.....	24
1.3. Естественный способ задания движения МТ.....	25
1.3.1. Уравнение движения МТ.....	25
1.3.2. Скорость МТ.....	25
1.3.3. Связь между координатным декартовым и естественным способами задания движения МТ.....	26
1.3.4. Элементы дифференциальной геометрии.....	26
1.3.5. Ускорение МТ.....	29
1.4. Частные случаи движения МТ.....	30
1.4.1. Прямолинейное движение МТ.....	30
1.4.2. Криволинейное движение МТ.....	31
1.5. Алгоритм решения задач кинематики МТ — схема алгоритма K01 КМТ с комментариями и примерами.....	32
1.6. Алгоритм решения задач кинематики равномерного и равнопере- менного движений МТ — схема алгоритма K01 КМТ(P) с коммента- риями и примерами.....	36
Глава 2. Поступательное движение НМС.....	40
Глава 3. Вращательное движение НМС вокруг неподвижной оси.....	42
3.1. Определение, уравнение движения НМС.....	42
3.2. Угловая скорость НМС.....	43
3.3. Угловое ускорение НМС.....	43

3.4. Частные случаи вращательного движения НМС вокруг неподвижной оси.....	44
3.4.1. Равномерное вращательное движение НМС.....	44
3.4.2. Равнопеременное вращательное движение НМС.....	44
3.5. Траектория, уравнение движения точки НМС.....	45
3.6. Скорость точки НМС.....	45
3.7. Ускорение точки НМС.....	46
3.8. Преобразование простейших движений.....	47
3.9. Алгоритм решения задач кинематики вращательного движения НМС вокруг неподвижной оси — схема алгоритма К03 ВДТ с комментариями и примерами.....	50
Глава 4. Плоскопараллельное движение НМС.....	57
4.1. Определение.....	57
4.2. Геометрический метод рассмотрения движения плоской фигуры в ее плоскости.....	58
4.3. Угловая скорость и ускорение плоской фигуры.....	60
4.4. Мгновенный центр вращения плоской фигуры.....	60
4.5. Теорема о скоростях точек плоской фигуры.....	60
4.6. Теорема о проекциях скоростей точек плоской фигуры.....	62
4.7. Мгновенный центр скоростей плоской фигуры.....	62
4.8. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.....	63
4.9. Способы определения положения мгновенного центра скоростей плоской фигуры.....	64
4.10. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры.....	66
4.11. Аналитический метод рассмотрения движения плоской фигуры.....	67
4.12. Алгоритм решения задач кинематики плоскопараллельного движения НМС по определению угловой скорости и скоростей точек плоской фигуры — схема алгоритма К04 ПДС с комментариями и примерами.....	70
4.13. Алгоритм решения задач кинематики плоскопараллельного движения НМС по определению углового ускорения и ускорений точек плоской фигуры — схема алгоритма К04 ПДУ с комментариями и примерами.....	84
Глава 5. Движение НМС с одной неподвижной точкой — сферическое движение НМС.....	93
5.1. Определение, углы Эйлера, уравнения движения НМС.....	93
5.2. Теорема Эйлера-Даламбера.....	95
5.3. Мгновенная ось вращения, угловая скорость НМС.....	97
5.4. Выражение угловой скорости НМС через углы Эйлера — кинематические уравнения Эйлера.....	98
5.5. Угловое ускорение НМС.....	98
5.6. Скорость точки НМС.....	99
5.7. Ускорение точки НМС.....	101

Глава 6. Общий случай движения НМС	103
6.1. Уравнения движения НМС.....	103
6.2. Скорость точки НМС.....	104
6.3. Независимость угловой скорости и углового ускорения НМС от выбора полюса.....	104
6.4. Ускорение точки НМС.....	105
Глава 7. Сложное движение МТ	106
7.1. Абсолютное, относительное и переносное движения МТ.....	106
7.2. Теорема о сложении скоростей МТ.....	107
7.3. Теорема о сложении ускорений МТ.....	109
7.4. Ускорение Кориолиса.....	110
7.5. Алгоритм решения задач сложного движения МТ — схема алгоритма К07 СДТ с комментариями и примерами.....	112
Глава 8. Сложное движение НМС	126
8.1. Абсолютное, относительное и переносное движения НМС.....	126
8.2. Сложение поступательных движений НМС.....	126
8.3. Сложение вращательных движений НМС вокруг пересекающихся осей.....	127
8.4. Сложение вращательных движений НМС вокруг двух параллельных осей.....	128
8.4.1. Вращательные движения НМС направлены в одну сторону.....	129
8.4.2. Вращательные движения НМС направлены в разные стороны и $\omega_1 \neq \omega_2$	130
8.4.3. Вращательные движения НМС направлены в разные стороны и $\omega_1 = \omega_2$ (пара вращений).....	131
8.5. Сложение поступательного и вращательного движений НМС.....	132
8.5.1. Скорость поступательного движения перпендикулярна оси вращательного движения НМС ($\vec{V} \perp \vec{\omega}$).....	132
8.5.2. Скорость поступательного движения параллельна оси вращательного движения НМС ($\vec{V} \parallel \vec{\omega}$).....	133
8.5.3. Скорость поступательного движения образует с осью вращательного движения НМС произвольный угол.....	134
Заключение	
Управляющий алгоритм кинематики — схема алгоритма К00 УПП с комментариями.....	136
Часть 2. Статика	
Введение в статику.....	139
Глава 1. Основные определения, аксиомы	140
1.1. Силы, связи.....	140
1.2. Аксиомы статики.....	141
1.3. Моменты силы относительно точки и оси.....	143
1.3.1. Момент силы относительно точки.....	143

1.3.2. Момент силы относительно оси.....	144
1.3.3. Связь между моментами силы относительно точки и оси.....	145
1.3.4. Моменты силы относительно начала координат и координатных осей.....	146
Глава 2. Система сходящихся сил	147
2.1. Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей	147
2.1.1. Векторная (геометрическая) форма	147
2.1.2. Алгебраическая форма	148
2.2. Условия равновесия системы сходящихся сил	148
2.2.1. Векторная (геометрическая) форма	148
2.2.2. Алгебраическая форма.....	148
2.2.3. Теорема о трех уравновешенных силах	149
Глава 3. Системы двух параллельных сил.....	150
3.1. Система двух параллельных и направленных в одну сторону сил	150
3.2. Система двух параллельных, не равных по модулю и направленных в противоположные стороны сил	151
3.3. Пара сил	153
3.3.1. Понятие пары сил.....	153
3.3.2. Момент пары	153
3.4. Теоремы об эквивалентности пар.....	154
3.5. Приведение систем пар сил к равнодействующей паре	155
3.5.1. Сложение пар сил, лежащих в пересекающихся плоскостях.....	155
3.5.2. Сложение пар сил, лежащих в параллельных плоскостях.....	156
3.6. Условия равновесия систем пар сил	156
Глава 4. Приведение пространственной и плоской систем сил	157
4.1. Основная теорема статики или теорема о параллельном переносе силы.....	157
4.2. Приведение систем сил к центру.....	157
4.2.1. Пространственная система сил	157
4.2.2. Плоская система сил	159
4.3. Формулы для нахождения главного вектора и главного момента.....	159
4.3.1. Пространственная система сил	159
4.3.2. Плоская система сил	160
4.4. Теорема о зависимости главного момента от центра приведения.....	160
4.4.1. Пространственная система сил	160
4.4.2. Плоская система сил	161
4.5. Инварианты статики	162
4.5.1. Пространственная система сил	162
4.5.2. Плоская система сил	162
4.6. Приведение произвольной системы сил к простейшим системам.....	163
4.6.1. Приведение системы сил к равнодействующей ($\vec{R}_O \cdot \vec{M}_O = 0$).....	163
4.6.2. Приведение системы сил к паре сил ($\vec{R}_O \cdot \vec{M}_O = 0$).....	163

4.6.3. Приведение системы сил в случае, когда $\bar{\mathbf{R}}_O = 0$, $\bar{\mathbf{M}}_O = 0$	164
4.6.4. Приведение системы сил к динаме ($\bar{\mathbf{R}}_O \cdot \bar{\mathbf{M}}_O \neq 0$)	164
4.7. Алгоритм решения задач по приведению систем сил к простейшим системам – схема алгоритма С04 ППВ с комментариями и примером	166
4.8. Теорема Вариньона	169
4.8.1. Пространственная система сил	169
4.8.2. Плоская система сил	170
Глава 5. Условия равновесия систем сил	171
5.1. Пространственная система сил	171
5.1.1. Геометрическая форма	171
5.1.2. Алгебраическая форма	171
5.2. Плоская система сил	172
5.2.1. Первая форма	172
5.2.2. Вторая форма	173
5.2.3. Третья форма	173
5.3. Алгоритм решения задач на равновесие систем сил – схема алгоритма С05 РПЛ, С05 РПП с комментариями и примерами	176
Глава 6. Расчет ферм	187
6.1. Понятие фермы	187
6.2. Метод вырезания узлов	188
6.3. Метод сквозных сечений (способ Риттера)	190
Глава 7. Равновесие НМС, находящегося под действием систем сил, при наличии трения	194
7.1. Трение скольжения	194
7.2. Законы Кулона	195
7.3. Трение качения	196
Глава 8. Центр параллельных сил и центр тяжести НМС	198
8.1. Центр параллельных сил	198
8.2. Центр тяжести НМС	199
8.3. Способы определения центра тяжести НМС	201
8.4. Алгоритм решения задач по определению центра тяжести – схема алгоритма С08 ОЦТ с комментариями и примерами	202
Заключение	
Управляющий алгоритм статики – схема алгоритма К00 УПП с комментариями и примерами	206
Часть 3. Динамика	
Введение в динамику	208
Глава 1. Динамика МТ	209
1.1. Законы (аксиомы) динамики МТ	209
1.2. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной МТ	211

1.3. Две основные задачи динамики МТ	213
1.3.1. Первая (прямая) задача динамики МТ	213
1.3.2. Вторая (обратная) задача динамики МТ	213
1.4. Алгоритм решения первой и второй задач динамики МТ – схема	
1.5. алгоритма Д14 ОЗД с комментариями и примерами	216
1.5. Колебательное движение МТ.....	223
1.5.1. Уравнение колебательного движения МТ	224
1.5.2. Колебательное движение МТ в среде без сопротивления при отсутствии возмущающей силы	229
1.5.3. Колебательное движение МТ в среде с сопротивлением при отсутствии возмущающей силы	230
1.5.4. Колебательное движение МТ в среде без сопротивления под действием возмущающей силы в случае, когда частота вынужденных колебаний не совпадает с частотой собственных колебаний ($p \neq \omega$)	231
1.5.5. Колебательное движение МТ в среде без сопротивления под действием возмущающей силы в случае, когда частота вынуж- денных колебаний совпадает с частотой собственных колебаний – явление резонанса ($p = \omega$).....	232
1.5.6. Колебательное движение МТ в поле силы тяжести, в среде с сопротивлением под действием возмущающей силы.....	233
1.6. Общие теоремы динамики МТ	234
1.6.1. Теорема об изменении количества движения МТ.....	234
1.6.2. Теорема об изменении момента количества движения МТ.....	235
1.6.3. Теорема об изменении кинетической энергии МТ, работа силы	237
1.7. Принцип Даламбера для МТ.....	240
Глава 2. Динамика относительного движения МТ	242
2.1. Дифференциальные уравнения относительного движения МТ	242
2.2. Равновесие МТ вблизи поверхности Земли	243
2.3. Отклонение к востоку МТ, падающей вблизи поверхности Земли.....	244
Глава 3. Основные понятия динамики СМТ	247
3.1. Внешние и внутренние силы, свойства внутренних сил.....	247
3.2. Центр масс СМТ	248
3.3. Моменты инерции СМТ.....	248
3.3.1. Определения моментов инерции относительно точки, оси и плоскости.....	248
3.3.2. Моменты инерции относительно начала координат, коорди- натных осей и координатных плоскостей декартовой системы координат	249
3.3.3. Частные случаи моментов инерции.....	250
3.3.4. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей – теорема Штейнера – Гюйгенса.....	252

Глава 4. Дифференциальные уравнения движения СМТ и общие теоремы динамики СМТ	253
4.1. Дифференциальные уравнения движения СМТ	253
4.2. Теорема об изменении количества движения СМТ	254
4.3. Алгоритм решения задач с помощью теоремы об изменении количества движения СМТ – схема алгоритма Д43 КДС с комментариями и примерами	256
4.4. Теорема о движении центра масс СМТ	259
4.5. Алгоритм решения задач с помощью теоремы о движении центра масс СМТ – схема алгоритма Д45 ЦМС с комментариями и примерами	260
4.6. Теорема об изменении кинетического момента СМТ	266
4.7. Алгоритм решения задач с помощью теоремы об изменении кинетического момента СМТ – схема алгоритма Д47 КМС с комментариями и примерами	270
4.8. Теорема об изменении кинетической энергии СМТ	276
4.8.1. Три формы теоремы	276
4.8.2. Кинетическая энергия НМС в частных случаях движения	278
4.8.3. Работа произвольной системы сил, приложенной к СМТ	280
4.9. Алгоритм решения задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии СМТ – схема алгоритма Д49 КЭС с комментариями и примерами	282
4.10. Потенциальное силовое поле	286
4.10.1. Потенциальное силовое поле МТ	286
4.10.2. Потенциальная энергия МТ	287
4.10.3. Примеры вычисления силовой функции и потенциальной энергии МТ	288
4.10.4. Силовая функция и потенциальная энергия СМТ	289
4.10.5. Закон сохранения механической энергии МТ	290
4.10.6. Закон сохранения механической энергии СМТ	291
Глава 5. Принцип Даламбера для СМТ	292
5.1. Принцип Даламбера для СМТ в двух формах	292
5.2. Вычисление главного вектора и главного момента сил инерции	294
5.3. Определение динамических реакций НМС, вращающейся относительно неподвижной оси	294
5.4. Алгоритм решения задач с помощью принципа Даламбера – схема алгоритма Д54 ПДС с комментариями и примерами	300
Глава 6. Динамика НМС	307
6.1. Дифференциальные уравнения поступательного движения НМС	307

6.2. Дифференциальное уравнение вращательного движения НМС относительно неподвижной оси	307
6.3. Физический маятник	308
6.4. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения НМС	310
Глава 7. Динамика МТ переменной массы	312
7.1. Понятие о МТ переменной массы	312
7.2. Дифференциальное уравнение движения МТ переменной массы – уравнение Меццерского	312
7.3. Первая задача Циолковского	314
7.4. Вторая задача Циолковского	316
Глава 8. Теория удара	317
8.1. Основные положения и понятия теории удара	317
8.2. Основное уравнение теории удара	317
8.3. Удар МТ о неподвижную поверхность	319
8.3.1. Прямой удар МТ о неподвижную поверхность	319
8.3.2. Косой удар МТ о неподвижную поверхность	321
8.4. Теорема об изменении количества движения СМТ при ударе	322
8.5. Теорема о движении центра масс СМТ при ударе	323
8.6. Теорема об изменении кинетического момента СМТ при ударе	324
8.7. Прямой центральный удар двух АТТ.....	325
8.8. Потеря кинетической энергии при прямом центральном ударе двух АТТ. Теорема Карно	328
8.9. Определение ударных реактивных импульсов АТТ, вращающегося относительно неподвижной оси	329
8.10. Условия отсутствия ударных реактивных импульсов АТТ, вращающегося относительно неподвижной оси	331
Заключение	
Управляющий алгоритм динамики – схема алгоритма Д00 УПР с комментариями	334

Часть 4. Элементы аналитической механики

Глава 1. Основные понятия	336
1.1. Классификация связей	336
1.2. Виртуальные перемещения	337
1.3. Условия, налагаемые связями на вариации координат.....	338
1.4. Обобщенные координаты, степени свободы	340
1.6. Работа сил на виртуальных перемещениях, идеальные связи, обобщенные силы	340
Глава 2. Аналитическая статика	342
2.1. Принцип виртуальных перемещений для СМТ	342
2.2. Условия равновесия СМТ в обобщенных координатах	344

Глава 3. Аналитическая динамика	345
3.1. Общее уравнение динамики – уравнение Даламбера-Лагранжа	345
3.2. Уравнения движения СМТ в обобщенных координатах – уравнения Лагранжа второго рода	346
Глава 4. Алгоритмы решения задач	350
4.1. Алгоритм решения задач с использованием принципа виртуальных перемещений и общего уравнения динамики – схемы алгоритмов А41 ПВП, А41 ОУД с комментариями и примерами	350
4.2. Алгоритм решения задач с помощью уравнений равновесия в обобщенных координатах и уравнений Лагранжа второго рода – схемы алгоритмов А42 УРОК, А42 УЛВР с комментариями и примерами.....	364
Заключение	
Управляющий алгоритм аналитической механики – схема алгоритма АМ0 УПР с комментариями	380
Литература	382