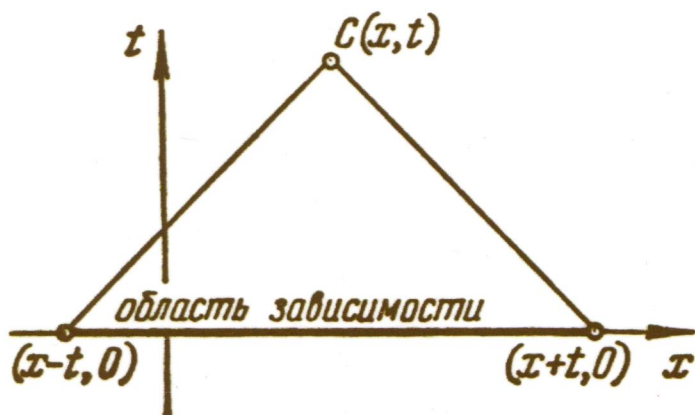


А. В. БИЦАДЗЕ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебник



Альянс

А. В. БИЦАДЗЕ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Издание 2-е, переработанное и дополненное

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
механико-математических
и физических специальностей вузов*

Стереотипное издание

МОСКВА
Альянс
2017

УДК 617
22.16
Б 66

Бицадзе А. В.

Уравнения математической физики: Учебник. – 2-е изд., перераб. и дополненное. – М.: Альянс, 2017. – 336 с.

ISBN 978-5-00106-233-2

В предлагаемом новом издании наряду с традиционными разделами теории линейных уравнений в частных производных, изложенными в первом издании, внимание уделено вопросам локальной разрешимости классических задач для некоторых классов нелинейных уравнений в частных производных и построению точных решений в отдельных частных случаях нелинейных уравнений и систем.

Книга рассчитана на студентов вузов, преподавателей и специалистов научно-технического профиля, интересующихся математическим моделированием и численным экспериментом.

УДК 617
22.16
Б 66

Учебник

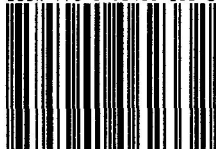
Андрей Васильевич Бицадзе

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Подписано в печать 17.08.2017 г. Формат 84x108/32.
Печать офсетная. Тираж 30 экз. Заказ № 118975

ООО «Издательство Альянс»
125057, Москва, ул. Острякова, д. 6-137
Тел./факс (499) 155-71-95 (многоканальный)
izdat@aliantsbooks.ru www.aliantsbooks.ru

ISBN 978-5-00106-233-2



9 785001 062332 >

ISBN 978-5-00106-233-2

Отпечатано: ПАО «Т 8 Издательские Технологии»
109316 Москва, Волгоградский проспект, дом 42, корпус
Тел.: 8 495 221-89-80

© Бицадзе А. В., 1982
© Оформление. Издательство Альянс, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	10
Введение	11
§ 1. Вводные понятия и определения	11
1°. Понятия дифференциального уравнения с частными производными и его решения	11
2°. Понятие характеристической формы и классификация линейных уравнений второго порядка	13
3°. Классификация уравнений высшего порядка	15
4°. Системы уравнений с частными производными	16
§ 2. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными	17
1°. Характеристические кривые и характеристические направления	17
2°. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными	19
§ 3. Простейшие примеры трех основных типов уравнений с частными производными второго порядка	22
1°. Уравнение Лапласа	22
2°. Волновое уравнение	25
3°. Уравнение теплопроводности	28
4°. Постановка некоторых задач для уравнений с частными производными	29
§ 4. Понятие интегрального уравнения	30
1°. Основные определения и обозначения	30
2°. Классификация линейных интегральных уравнений	31
§ 5. Упрощенные математические модели некоторых явлений, изучаемых в физике и технике	33
1°. Электростатическое поле	33
2°. Колебания мембраны	35
3°. Распространение тепла	37
4°. Движение материальной точки под действием силы тяжести	39
Глава I	
Уравнения эллиптического типа	41
§ 1. Основные свойства гармонических функций	41
1°. Определение гармонической функции и некоторые ее элементарные свойства	41
2°. Интегральное представление гармонических функций	44

3°.	Формулы о среднем арифметическом	45
4°.	Принцип экстремума и единственность решения задачи Дирихле	46
§ 2.	Понятие функции Грина и решение задачи Дирихле для шара и полупространства	47
1°.	Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа	47
2°.	Решение задачи Дирихле для шара. Формула Пуассона	49
3°.	Проверка краевых условий	52
4°.	Решение задачи Дирихле для полупространства	53
5°.	Некоторые важнейшие следствия, вытекающие из формулы Пуассона. Теоремы Лиувилля и Гарнака	54
§ 3.	Потенциал объемных масс	57
1°.	Непрерывность потенциала объемных масс и его производных первого порядка	57
2°.	Существование производных второго порядка потенциала объемных масс	58
3°.	Уравнение Пуассона	60
4°.	Формула Гаусса	63
§ 4.	Потенциалы двойного и простого слоя	64
1°.	Определение потенциала двойного слоя	64
2°.	Формулы скачка для потенциала двойного слоя и редукция задачи Дирихле к интегральному уравнению	67
3°.	Потенциал простого слоя. Задача Неймана	70
4°.	Внешние задачи Дирихле и Неймана	72
§ 5.	Некоторые сведения из общей теории линейных эллиптических уравнений второго порядка	74
1°.	Сопряженные операторы. Формула Грина	74
2°.	Существование решений линейного эллиптического уравнения второго порядка	75
3°.	Постановка краевых задач	78
4°.	Принцип экстремума. Единственность решения задачи Дирихле	79
5°.	Обобщенные потенциалы простого и двойного слоя	81

Глава II

Система Коши — Римана.

	Элементы теории аналитических функций	83
§ 1.	Понятие аналитической функции комплексного переменного	83
1°.	Система Коши — Римана	83
2°.	Понятие аналитической функции	84
3°.	Примеры аналитических функций	87
4°.	Конформное отображение	90
5°.	Конформные отображения, осуществляемые некоторыми элементарными функциями, и обращение этих функций. Понятие римановой поверхности	93
§ 2.	Комплексное интегрирование	100
1°.	Понятие комплексного интегрирования	100
2°.	Теорема Коши	102

	3°. Интегральная формула Коши	104
	4°. Интеграл типа Коши	107
	5°. Сопряженные гармонические функции. Теорема Морера	108
§ 3.	Важнейшие следствия, вытекающие из интегральной формулы Коши	110
	1°. Принцип максимума модуля аналитической функции	110
	2°. Теоремы Вейерштрасса	111
	3°. Ряд Тейлора	113
	4°. Единственность аналитической функции. Теорема Лиувилля	115
	5°. Ряд Лорана	116
	6°. Понятия особых точек и вычета аналитической функции	119
	7°. Формула Шварца. Решение задачи Дирихле	124
§ 4.	Аналитическое продолжение	127
	1°. Понятие аналитического продолжения	127
	2°. Принцип непрерывности	127
	3°. Принцип симметрии Римана — Шварца	128
§ 5.	Формулы для предельных значений интеграла типа Коши и некоторые их приложения	130
	1°. Понятие интеграла в смысле главного значения по Коши	130
	2°. Касательная производная потенциала простого слоя	131
	3°. Предельные значения интеграла типа Коши	133
	4°. Понятие кусочно-аналитической функции	136
	5°. Приложения к краевым задачам	137
§ 6.	Функции нескольких переменных	142
	1°. Вводные понятия и обозначения	142
	2°. Понятие аналитической функции нескольких переменных	143
	3°. Степенной ряд с несколькими переменными	145
	4°. Интегральная формула Коши и теорема Тейлора	147
	5°. Аналитические функции действительных переменных	149
	6°. Конформные отображения в евклидовых пространствах	151

Глава III

	Уравнения гиперболического типа	154
§ 1.	Волновое уравнение	154
	1°. Волновое уравнение с тремя пространственными переменными. Формула Кирхгофа	154
	2°. Волновое уравнение с двумя пространственными переменными. Формула Пуассона	156
	3°. Уравнение колебаний струны. Формула Даламбера	157
	4°. Понятия области зависимости, области влияния и области определения	158
§ 2.	Неоднородное волновое уравнение	160
	1°. Случай трех пространственных переменных, запаздывающий потенциал	160
	2°. Случай двух и одного пространственных переменных	161
§ 3.	Задачи, корректно поставленные для гиперболических уравнений	162
	1°. Единственность решения задачи Коши	162

2°. Корректность постановки задачи Коши	164
3°. Общая постановка задачи Коши	165
4°. Задача Гурса (характеристическая задача)	167
5°. Некоторые некорректно поставленные задачи	168
§ 4. Общее линейное уравнение второго порядка гиперболического типа с двумя независимыми переменными	169
1°. Функция Римана	169
2°. Задача Гурса	172
3°. Задача Коши	173

Глава IV

Уравнения параболического типа	175
§ 1. Уравнение теплопроводности. Первая краевая задача	175
1°. Принцип экстремума	175
2°. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности	177
§ 2. Задача Коши — Дирихле	179
1°. Постановка задачи Коши — Дирихле и доказательство существования ее решения	179
2°. Единственность и устойчивость решения задачи Коши — Дирихле	181
3°. Неоднородное уравнение теплопроводности	182
§ 3. О характере гладкости решений уравнений с частными производными	183
1°. Случай эллиптических и параболических уравнений	183
2°. Случай гиперболических уравнений	183

Глава V

Интегральные уравнения	185
§ 1. Метод последовательных приближений решения интегральных уравнений	185
1°. Общие замечания	185
2°. Построение решения уравнения Фредгольма второго рода при малых значениях параметра методом последовательных приближений	186
3°. Интегральное уравнение Вольтерра второго рода	188
§ 2. Теоремы Фредгольма	189
1°. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром	189
2°. Понятия итерированного ядра и резольвенты	193
3°. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром	194
4°. Понятие спектра	197
5°. Интегральное уравнение Вольтерра второго рода с кратным интегралом	199
6°. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода	200
§ 3. Применения теории линейных интегральных уравнений второго рода	201

1°.	Применение альтернативы Фредгольма в теории краевых задач для гармонических функций	201
2°.	Редукция задачи Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений к интегральному уравнению Вольтерра второго рода	204
3°.	Краевая задача для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка	206
§ 4.	Сингулярные интегральные уравнения	209
1°.	Понятие сингулярного интегрального уравнения	209
2°.	Интегральные уравнения Гильберта	209
3°.	Преобразование Гильберта	212
4°.	Интегральное уравнение теории крыла самолета	213
5°.	Интегральное уравнение с логарифмическим ядром	215
 Глава VI		
Методы, наиболее часто применяемые на практике при решении уравнений с частными производными		217
§ 1.	Метод разделения переменных	217
1°.	Решение основной смешанной задачи для уравнения колебаний струны	217
2°.	Задача колебаний мембраны	221
3°.	Понятие полной ортонормированной системы функций	224
4°.	Случай круговой мембраны	227
5°.	Общие замечания относительно метода разделения переменных	230
6°.	Шаровые и сферические функции	232
7°.	Вынужденные колебания	234
§ 2.	Метод интегральных преобразований	235
1°.	Интегральные представления решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка	235
2°.	Понятия преобразований Лапласа, Фурье и Меллина	241
3°.	Применение интегральных преобразований к задачам для дифференциальных уравнений с частными производными	243
4°.	Применение преобразования Фурье при построении глобального решения задачи Коши для уравнения колебаний струны	245
5°.	Понятие свертки	248
6°.	Понятие δ -функции Дирака	251
§ 3.	Метод конечных разностей	252
1°.	Конечно-разностная замена уравнений с частными производными	252
2°.	Задача Дирихле для уравнения Лапласа	254
3°.	Первая краевая задача для уравнения теплопроводности	255
4°.	Общие замечания относительно метода конечных разностей	256
§ 4.	Асимптотическое разложение	256
1°.	Асимптотическое разложение функции одного переменного	256

2°. Метод Ватсона построения асимптотических разложений	261
3°. Метод перевала	264
§ 5. Понятие о вариационных методах	267
1°. Принцип Дирихле	267
2°. Задача о собственных значениях	269
3°. Минимизирующие последовательности	271
4°. Понятие о методе Рунца	272
5°. Построение приближенного решения задачи о собственных значениях. Понятие о методе Бубнова—Галеркина	273
§ 6. Построение приближенного решения задачи Дирихле для гармонических функций в круге	275
1°. Задача Дирихле для гармонических функций с разрывными краевыми условиями	275
2°. Справедливость формулы Пуассона решения задачи Дирихле при наличии разрывов в краевых условиях	276
3°. Построение приближенного решения задачи Дирихле для гармонических функций в круге	278
 Глава VII	
Нелинейные уравнения в частных производных	280
§ 1. Уравнения Коши—Ковалевской	280
1°. Определение системы Коши—Ковалевской и постановка задачи Коши для нее	280
2°. Редукция системы (3) к системе первого порядка	281
3°. Задача Коши с аналитическими данными. Теорема Коши—Ковалевской	283
4°. Понятие мажоранты аналитической функции	285
5°. Доказательство теоремы Коши—Ковалевской при отсутствии в задаче (17), (18) пространственных переменных	286
6°. Доказательство теоремы Коши—Ковалевской для задачи (17), (18)	288
7°. Некоторые другие замечания относительно задачи Коши (18) для системы Коши—Ковалевской (17)	291
§ 2. Нелинейные гиперболические и эллиптические уравнения второго порядка	292
1°. Нелинейные уравнения гиперболического типа	292
2°. О единственности решения задачи Гурса	295
3°. Задача Коши для одной квазилинейной гиперболической системы	296
4°. Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка	299
5°. Достаточное условие единственности решения задачи Дирихле для нелинейного равномерно эллиптического уравнения второго порядка	301
§ 3. Некоторые классы нелинейных уравнений в частных производных	304
1°. Общее представление решений одного класса квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка	304

2°. Редукция одного класса квазилинейных уравнений второго порядка к линейному уравнению	307
3°. Некоторые другие примеры уравнений вида (95)	310
4°. Построение точных решений еще одного класса квазилинейных уравнений	312
5°. Система уравнений ферромагнетизма	314
6°. Одномерный случай гамильтониана (119)	317
7°. Варианты уравнений гравитационного поля	318
8°. Уравнение Лиувилля	321
9°. Синус-уравнение Гордона	323
10°. Задача Коши — Дирихле для одного класса нелинейных уравнений параболического типа	323
11°. Задача Коши для уравнения (86)	327
Предметный указатель	330