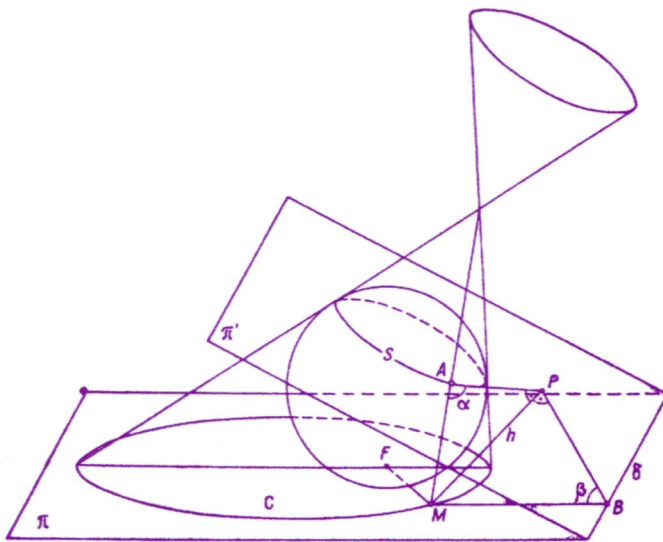


П. С. МОДЕНОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебник



Альянс

П. С. МОДЕНОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования РСФСР
в качестве учебника для заочных
и вечерних отделений университетов и
педагогических вузов

Стереотипное издание

МОСКВА
Альянс
2016

УДК 516

Моденов П. С.

Аналитическая геометрия: Учебник – М.: Альянс, 2016. – 670 с.

ISBN 978-5-00106-135-9

Настоящая книга предназначена в качестве учебника по аналитической геометрии для студентов механико-математических, физических и физико-математических факультетов университетов и педагогических институтов. Наличие в книге задач с решениями и задач для самостоятельного решения (с ответами) позволяет использовать заочниками эту часть книги как материал семинарских занятий. Помимо традиционного материала по аналитической геометрии в книге дано понятие о линейном пространстве и линейном многообразии. Линейное отображение определяется как коллинеация, при которой сохраняется простое отношение. Изложено понятие собственных векторов. Дана метрическая теория инвариантов в аффинной системе. Рассмотрены произвольные плоские сечения поверхности второго порядка. Проективные координаты и теоремы Дезарга, Паскаля и Брианшона даны в дополнении; в основном тексте - только однородные координаты.

УДК 516

Учебник

Петр Сергеевич Моденов

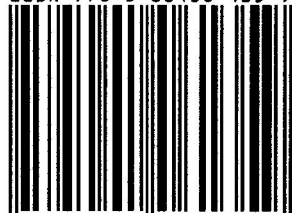
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Подписано в печать 22.02.2016 г. Формат 60х90/16.

Печать офсетная. Тираж 30 экз. Заказ № 114970

ООО «Издательство Альянс»
125319, Москва, ул. Планетная, д. 47-3
Тел./факс (499) 155-71-95 (многоканальный)
izdat@aliansbooks.ru www.aliansbooks.ru

ISBN 978-5-00106-135-9



9 785001 061359 >

ISBN 978-5-00106-135-9

Отпечатано: ПАО «Т 8 Издательские Технологии»
109316 Москва, Волгоградский проспект, дом 42, корпус 5
Тел.: 8 495 221-89-80

© Моденов П. С., 1969

© Оформление. Издательство Альянс, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I	
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПРЯМОЙ	
§ 1. Направленные отрезки	5
§ 2. Ось. Координата направленного отрезка	5
§ 3. Ось координат. Координата точки	6
§ 4. Теорема Шаля. Координата направленного отрезка, заданного двумя точками декартовой оси координат. Расстояние между двумя точками, лежащими на оси координат	7
§ 5. Деление направленного отрезка в данном отношении	8
§ 6. Преобразование системы координат на прямой	10
§ 7. Векторы	10
Глава II	
ПРОСТЕЙШИЕ ВОПРОСЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ	
I. Координаты точки и вектора на плоскости и в пространстве	15
§ 8. Параллельное проектирование	15
§ 9. Общая декартова и декартова прямоугольная системы координат на плоскости	17
§ 10. Общая декартова и декартова прямоугольная системы координат в пространстве	18
§ 11. Координаты вектора на плоскости и в пространстве	21
II. Расстояние между двумя точками, деление направленного отрезка в данном отношении, площадь треугольника, объем тетраэдра	25
§ 12. Расстояние между двумя точками на плоскости и в пространстве	25
§ 13. Деление направленного отрезка в данном отношении	28
§ 14. Ориентированный треугольник. Ориентированная плоскость. Площадь треугольника	30
§ 15. Ориентированный тетраэдр. Ориентированное пространство. Объем тетраэдра	38
§ 16. Углы	43
1. Определение угла	43
2. Ориентированный угол. Его величина. Равенство, сумма и разность величин ориентированных углов	43
3. Угол между двумя осями. Угол от одной оси до другой и его величина	45
4. Углы между двумя прямыми. Угол от одной прямой до другой и его величина	46

§ 17. Теорема Шаля для ориентированных углов	48
III. Полярная система координат на плоскости и в пространстве	50
§ 18. Полярная система координат на плоскости	50
§ 19. Полярная система координат в пространстве. Полярные и сферические координаты	52
§ 20. Задачи к главе II	54
1. Задачи с решениями	54
2. Задачи для самостоятельного решения	58

Глава III

ЛИНИИ, ПОВЕРХНОСТИ И ИХ УРАВНЕНИЯ

I. Линия и ее уравнения	61
§ 21. О понятии линии и ее уравнениях	61
§ 22. Примеры составления уравнений линии	62
II. Поверхности и линии в пространстве	69
§ 23. Поверхность и ее уравнение	69
§ 24. Примеры составления уравнений поверхностей	70
§ 25. Цилиндрические и конические поверхности	74
1. Цилиндрические поверхности	74
2. Конические поверхности	75
§ 26. Поверхности вращения	77
§ 27. Линия в пространстве и ее уравнения	80
§ 28. Примеры уравнений линий в пространстве	81
§ 29. Задачи к главе III для самостоятельного решения	83

Глава IV

ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 30. Сумма векторов	90
§ 31. Разность векторов	92
§ 32. Произведение числа на вектор	93
§ 33. Теоремы о проекциях векторов	95
§ 34. Теоремы о координатах векторов	96
§ 35. Сумма, разность и произведение числа на вектор в координатах	97
§ 36. Линейная зависимость векторов. Линейная комбинация векторов. Коллинеарность векторов. Компланарность векторов	99
§ 37. Базис и координаты вектора	104
§ 38. Скалярное произведение двух векторов	107
§ 39. Выражение скалярного произведения в координатах	109
§ 40. Угол от одного вектора до другого на ориентированной плоскости	112
§ 41. Объем ориентированного параллелепипеда	114
§ 42. Объем ориентированного параллелепипеда в координатах. Объем тетраэдра	119
§ 43. Векторное произведение	121
§ 44. Смешанное произведение трех векторов	123
§ 45. Координаты векторного произведения	123
§ 46. Свойства векторного произведения	124
§ 47. Двойное векторное произведение	125
§ 48. Площадь параллелограмма и треугольника в пространстве	125
§ 49. Примеры и задачи к главе IV	126
1. Задачи с решениями	126
2. Задачи для самостоятельного решения	136

Глава V

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 50. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении	138
§ 51. Общее уравнение прямой	139
§ 52. Направляющий вектор прямой	139
§ 53. Частные случаи расположения прямой относительно системы координат	141
§ 54. Параметрические уравнения прямой	141
§ 55. Уравнение прямой, проходящей через две точки	142
§ 56. Уравнение прямой в отрезках	143
§ 57. Угловой коэффициент прямой	143
§ 58. Уравнение прямой с угловым коэффициентом	144
§ 59. Взаимное расположение двух прямых	144
§ 60. Пучок прямых	146
§ 61. Взаимное расположение трех прямых	149
§ 62. Геометрический смысл неравенства первой степени с двумя неизвестными	150
§ 63. Расстояние от точки до прямой	152
§ 64. Нормальное уравнение прямой	153
§ 65. Угол между двумя прямыми, условие перпендикулярности двух прямых	155
§ 66. Угол от одной прямой до другой в ориентированной плоскости	156
§ 67. Примеры и задачи к главе V	158
1. Задачи с решениями	158
2. Задачи для самостоятельного решения	168

Глава VI

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 68. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку компланарно двум неколлинеарным векторам	170
§ 69. Общее уравнение плоскости	170
§ 70. Условие компланарности вектора и плоскости	173
§ 71. Частные случаи расположения плоскости относительно системы координат	173
§ 72. Параметрические уравнения плоскости	174
§ 73. Уравнение плоскости, проходящей через две точки компланарно данному вектору	175
§ 74. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не принадлежащие одной прямой	175
§ 75. Уравнение плоскости в отрезках	176
§ 76. Взаимное расположение двух плоскостей	176
§ 77. Уравнения прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Параметрические уравнения прямой	179
§ 78. Уравнения прямой, проходящей через две точки	180
§ 79. Взаимное расположение двух прямых	180
§ 80. Взаимное расположение прямой и плоскости	181
§ 81. Прямая как линия пересечения двух плоскостей	182
§ 82. Пучок плоскостей	183
§ 83. Взаимное расположение трех плоскостей	186
§ 84. Связка плоскостей	187
§ 85. Геометрический смысл неравенства первой степени с тремя неизвестными	192
§ 86. Расстояние от точки до плоскости	193
§ 87. Нормальное уравнение плоскости	193

§ 88. Угол между двумя плоскостями. Условие перпендикулярности двух плоскостей	196
§ 89. Угол между двумя прямыми. Условие перпендикулярности двух прямых	197
§ 90. Угол между прямой и плоскостью. Условие перпендикулярности прямой и плоскости	198
§ 91. Уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую	199
§ 92. Уравнения общего перпендикуляра к двум неколлинеарным прямым	199
§ 93. Расстояние от точки до прямой в пространстве	201
§ 94. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми	201
§ 95. Примеры и задачи к главе VI	203
1. Задачи с решениями	203
2. Задачи для самостоятельного решения	210

Глава VII

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 96. Перенос декартовой системы координат	214
§ 97. Преобразование общей декартовой системы координат на плоскости	216
§ 98. Преобразование общей декартовой системы координат в пространстве	218
§ 99. Преобразование декартовой прямоугольной системы координат на плоскости	219
1. Переход от одной декартовой прямоугольной системы координат на плоскости к другой декартовой прямоугольной системе с той же ориентацией и с тем же началом координат	219
2. Переход от одной декартовой прямоугольной системы координат на плоскости к другой прямоугольной системе с противоположной ориентацией и с тем же началом координат	221
3. Общее преобразование одной декартовой прямоугольной системы координат на плоскости в другую прямоугольную систему	222
§ 100. Переход от одной декартовой прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе в пространстве	223
§ 101. Углы Эйлера	227

Глава VIII

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ КАНОНИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

§ 102. Эллипс и его каноническое уравнение	230
§ 103. Исследование формы эллипса	233
§ 104. Директрисы эллипса	235
§ 105. Эллипс как образ окружности при равномерном сжатии к ее диаметру	238
§ 106. Параметрические уравнения эллипса	240
§ 107. Построение эллипса по точкам	241
§ 108. Вычерчивание эллипса непрерывным движением	242
§ 109. Эллипс как ортогональная проекция окружности	243
§ 110. Касательная к эллипсу	245
§ 111. Оптическое свойство эллипса	246
§ 112. Гипербола и ее каноническое уравнение	247
§ 113. Исследование формы гиперболы	250

§ 114.	Эксцентриситет и директрисы гиперболы	253
§ 115.	Параметрические уравнения гиперболы	256
§ 116.	Сопряженные гиперболы	257
§ 117.	Уравнение гиперболы, огнесенной к асимптотам	258
§ 118.	Касательная к гиперболе	259
§ 119.	Оптическое свойство гиперболы	259
§ 120.	Парабола и ее каноническое уравнение	261
§ 121.	Исследование формы параболы	262
§ 122.	Построение параболы по точкам	264
§ 123.	Касательная к параболе	265
§ 124.	Оптическое свойство параболы	266
§ 125.	Полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы	267
§ 126.	Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения	268
§ 127.	Примеры и задачи к главе VIII	272
	1. Задачи с решениями	272
	2. Задачи для самостоятельного решения	277

Глава IX

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ КАНОНИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

§ 128.	Эллипсоид	284
§ 129.	Однополостный гиперболоид	288
§ 130.	Двуполостный гиперболоид	291
§ 131.	Конус второго порядка	293
§ 132.	Асимптотический конус гиперболоидов	294
§ 133.	Эллиптический параболоид	296
§ 134.	Гиперболический параболоид	298
§ 135.	Цилиндры второго порядка	301
§ 136.	Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида	302
	1. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида	302
	2. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида	309
§ 137.	Примеры и задачи к главе IX	313
	1. Задачи с решениями	313
	2. Задачи для самостоятельного решения	316

Глава X

КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ И КОМПЛЕКСНОЕ ПРОСТРАНСТВО. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЛИНИИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

§ 138.	Комплексная плоскость и комплексное пространство	320
	1. Комплексная плоскость	320
	2. Комплексное пространство	325
§ 139.	Плоские алгебраические линии	329
	1. Определение плоской алгебраической линии и ее порядка	329
	2. Пересечение алгебраических линий. Пересечение алгебраической линии с прямой	331
	3. Распадение алгебраических линий	333
§ 140.	Алгебраические поверхности	334
	1. Определение алгебраической поверхности	334
	2. Пересечение алгебраической поверхности с прямой и плоскостью	335
	3. Распадение алгебраических поверхностей	337

Глава XI

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ ОБЩИМ УРАВНЕНИЕМ

§ 141. Теорема о том, что всякое уравнение второй степени с двумя неизвестными определяет эллипс, гиперболу, параболу или две прямые	339
§ 142. Теория инвариантов	345
§ 143. Определение канонического уравнения линии второго порядка при помощи инвариантов. Распадение линии второго порядка на две прямые	352
§ 144. Центр линии второго порядка	357
§ 145. Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические направления. Классификация линий по числу и действительности асимптотических направлений	360
§ 146. Диаметр, сопряженный данному неасимптотическому направлению	364
1. Общая теория	364
2. Диаметры линий второго порядка, заданных каноническими уравнениями	369
§ 147. Касательная к линии второго порядка	370
§ 148. Уравнение линии второго порядка, отнесенной к двум ее сопряженным диаметрам; уравнение линии второго порядка, отнесенной к касательной и сопряженному к ней диаметру	373
§ 149. Главные направления и главные диаметры	381
§ 150. Определение расположения линии второго порядка по отношению к прямоугольной системе координат	384
§ 151. Примеры и задачи к главе XI	388
1. Задачи с решениями	388
2. Задачи для самостоятельного решения	397

Глава XII

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ ОБЩИМ УРАВНЕНИЕМ

§ 152. Теорема о том, что всякое уравнение второй степени с тремя неизвестными определяет эллипсоид, гиперболоид, параболоид, конус, цилиндр или две плоскости	402
§ 153. Теория инвариантов	413
§ 154. Определение канонического уравнения поверхности второго порядка при помощи инварианта	419
§ 155. Центр поверхности второго порядка	428
§ 156. Классификация поверхностей второго порядка по характеру места центров	430
§ 157. Конические и цилиндрические поверхности второго порядка, заданные общим уравнением	433
1. Конические поверхности	433
2. Цилиндрические поверхности	435
3. Распадение поверхности второго порядка	437
§ 158. Пересечение поверхности второго порядка с прямой. Асимптотические направления, асимптотический конус и конус асимптотических направлений	438
§ 159. Диаметральная плоскость, сопряженная данному неасимптотическому направлению. Особые направления относительно поверхности второго порядка	441
§ 160. Касательная плоскость	445
§ 161. Пересечение касательной плоскости с поверхностью второго порядка	447

§ 162.	Эллиптические, гиперболические или параболические точки поверхности второго порядка	448
§ 163.	Простейшие уравнения поверхностей второго порядка в общей декартовой системе координат	450
§ 164.	Главные направления поверхности второго порядка	458
§ 165.	Число главных направлений поверхности второго порядка	459
§ 166.	Определение расположения поверхности второго порядка по отношению к декартовой прямоугольной системе координат	461
§ 167.	Примеры и задачи к главе XII	467
	1. Задачи с решениями	467
	2. Задачи для самостоятельного решения	476

Глава XIII

ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 168.	Отображение и преобразование	483
§ 169.	Произведение преобразований	484
§ 170.	Группа преобразований	485

Глава XIV

ЛИНЕЙНЫЕ И АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 171.	Линейные преобразования и линейные отображения множества точек пространства, плоскости или прямой	485
§ 172.	Линейные преобразования множества векторов пространства, плоскости или прямой	487
§ 173.	Свойства линейных преобразований множества точек пространства, плоскости или прямой	488
§ 174.	Линейные преобразования в координатах	494
§ 175.	Аффинные преобразования и аффинные отображения	499
§ 176.	Геометрическая теория аффинных преобразований	501
§ 177.	Свойства аффинных преобразований и отображений	506
§ 178.	Аффинные преобразования в координатах	509
§ 179.	Примеры аффинных преобразований	512
§ 180.	Ортогональные преобразования и движения	520
§ 181.	Ортогональные преобразования в координатах	522
	1. Ортогональные преобразования плоскости	522
	2. Ортогональные преобразования пространства	523
§ 182.	Примеры ортогональных преобразований	525
§ 183.	Подобные преобразования	526
§ 184.	Собственные векторы линейного преобразования	528
§ 185.	Самосопряженное линейное преобразование и его собственные векторы	531
§ 186.	Представление аффинного преобразования в виде произведения ортогонального преобразования и трех сжатий к попарно перпендикулярным плоскостям	536
§ 187.	Применение аффинных преобразований к исследованию свойств линий второго порядка	538
§ 188.	Аффинная классификация линий второго порядка	540
§ 189.	Аффинная классификация поверхностей второго порядка	543
§ 190.	Примеры и задачи к главе XIV	544
	1. Задачи с решениями	544
	2. Задачи для самостоятельного решения	547

Глава XV

ЭЛЕМЕНТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 191	Проективная плоскость	557
	1. Первая модель проективной плоскости	557
	2. Вторая модель проективной плоскости	559
§ 192.	Однородные координаты точки и прямой на проективной плоскости	560
	1. Первая модель проективной плоскости	560
	2. Вторая модель проективной плоскости	562
	3. Связь проективных координат точки во второй модели с однородными координатами точки в первой модели	563
§ 193.	Уравнение прямой на проективной плоскости*, проходящей через две точки; пучок прямых	564
§ 194.	Группа проективных преобразований проективной плоскости. Группа аффинных преобразований как подгруппа группы проективных преобразований	565
§ 195	Проективное преобразование плоскости в координатах Основная теорема	566
§ 196	Примеры проективных преобразований проективной плоскости	572
§ 197	Понятие о проективном пространстве	581
§ 198	Принцип двойственности	583
§ 199	Однородные координаты точки и проективной плоскости в проективном пространстве	584
§ 200	Уравнение прямой, проходящей через две точки. Пучок и связка плоскостей	585
§ 201	Группа проективных преобразований проективного пространства Основная теорема	587
§ 202	Ангармоническое отношение. Гармонизм	588
§ 203	Линии второго порядка на проективной плоскости. Классификация линий второго порядка по характеру пересечения с несобственной прямой	598
§ 204.	Проективная классификация линий второго порядка Распадающиеся и нераспадающиеся линии	600
§ 205.	Проективно-аффинная классификация линий второго порядка	603
§ 206.	Необходимое и достаточное условие того, что два однородных уравнения второй степени определяют одну и ту же линию второго порядка	604
§ 207.	Касательная к линии второго порядка	606
§ 208.	Полос и полярная линия второго порядка	609
§ 209.	Сопряженные диаметры, центр и асимптоты в проективной теории линий второго порядка	612
§ 210.	Определение линии второго порядка по пяти точкам	613
§ 211.	Пучок линий второго порядка	614
§ 212.	Поверхность второго порядка в проективном пространстве. Классификация поверхностей второго порядка по характеру пересечения с несобственной плоскостью	616
§ 213.	Проективная классификация поверхностей второго порядка	618
§ 214.	Проективно-аффинная классификация поверхностей второго порядка в проективном пространстве	621
§ 215.	Необходимое и достаточное условие того, что два однородных уравнения второй степени определяют одну и ту же поверхность второго порядка	626
§ 216.	Касательная плоскость к поверхности второго порядка	628
§ 217.	Пересечение поверхности второго порядка касательной плоскостью	629

§ 218. Полюс и полярная плоскость поверхности второго порядка . . .	631
§ 219. Примеры и задачи к главе XV	632
1. Задачи с решениями	632
2. Задачи для самостоятельного решения	636

Дополнение I

ОРИЕНТАЦИЯ

1. Ориентация плоскости	638
2. Ориентация пространства	642

Дополнение II

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ МНОГОЧЛЕНА ВТОРОЙ
СТЕПЕНИ ОТ ДВУХ И ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЩЕЙ ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

1. Контравариантные и ковариантные координаты точки и вектора на плоскости	648
2. Контравариантные и ковариантные координаты вектора и точки в пространстве	648
3. Теория инвариантов уравнения линии второго порядка	649
4. Определение расположения линии второго порядка	654
5. Поверхности второго порядка	656

Дополнение III

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.
КРУГОВЫЕ СЕЧЕНИЯ. ОМБИЛИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

1. Приведение к каноническому виду плоского сечения поверхности второго порядка	660
2. Расположение в пространстве плоского сечения поверхности второго порядка	664
3. Круговые сечения поверхностей второго порядка	667
4. Омбилические точки	671

Дополнение IV

ПРОЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ. ТЕОРЕМЫ ДЕЗАРГА, ПАСКАЛЯ
И БРИАНШОНА. АВТОПОЛЯРНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК.
АВТОПОЛЯРНЫЙ ТЕТРАЭДР

1. Проективные координаты на проективной плоскости	673
2. Автополярный треугольник	678
3. Теоремы Дезарга, Паскаля и Брианшона	680
4. Проективные координаты в проективном пространстве	684
5. Автополярный тетраэдр	688