

Ю.Н. ГРИГОРЬЕВ

В.Ф. КОВАЛЕВ

С.В. МЕЛЕШКО

СИММЕТРИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$N \left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{dt} - J(f, f) \\ \dot{x} - F[\dot{x}(t-s)] \\ dY - f dt - g dB \end{array} \right\} = 0$$



НОВОСИБИРСК
«НАУКА»

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Ю.Н. ГРИГОРЬЕВ
В.Ф. КОВАЛЕВ
С.В. МЕЛЕШКО

**СИММЕТРИИ
НЕЛОКАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ



НОВОСИБИРСК
«НАУКА»
2018

УДК 517.9
ББК 22.161
Г83



*Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 18-11-00013*

Издание РФФИ не подлежит продаже

Григорьев Ю.Н. Симметрии нелокальных уравнений: Теория и приложения / Ю.Н. Григорьев, В.Ф. Ковалев, С.В. Мелешко. — Новосибирск: Наука, 2018. — 436 с.

ISBN 978-5-02-038753-9.

Монография представляет собой первое в отечественной литературе систематическое изложение группового анализа нелокальных уравнений. Показано распространение классического группового анализа на уравнения с нелокальными операторами, сделанное в оригинальных работах авторов. Опубликованы результаты многолетних исследований по теории группового анализа различных классов нелокальных уравнений и его приложениям к уравнениям Больцмана, Власова, Смолуховского, Бенни, Клейна — Гордона, Ито и др.

Книга адресована специалистам в области группового анализа, ученым, заинтересованным в применении группового анализа для исследования нелокальных уравнений, встречающихся в различных отраслях естественных и социальных наук, а также может служить учебным пособием по симметриям нелокальных уравнений для студентов и аспирантов, специализирующихся по прикладной математике и механике, физике и в других областях, где рассматриваются подобные уравнения.

Табл. 19. Ил. 3. Библиогр.: 269 назв.

Утверждено к печати Ученым советом
Института вычислительных технологий СО РАН

ISBN 978-5-02-038753-9

- © Ю.Н. Григорьев, В.Ф. Ковалев, С.В. Мелешко, 2018
- © Институт вычислительных технологий СО РАН, 2018
- © Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, 2018
- © Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2018
- © Редакционно-издательское оформление. Новосибирский филиал ФГУП «Издательство «Наука», 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	8
Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ	11
1.1. Основные понятия	11
1.1.1. Локальная группа Ли преобразований	12
1.1.2. Инвариантные многообразия	18
1.1.3. Допустимая группа Ли	20
1.1.4. Алгоритм нахождения допустимой группы	24
1.1.5. Пример нахождения допустимой группы Ли	25
1.1.6. Алгебры Ли операторов	27
1.1.7. Классификация подалгебр	31
1.1.8. Пример классификации подалгебр	35
1.1.9. О классификации алгебр Ли высокой размерности	36
1.2. Преобразования эквивалентности	37
1.2.1. Построение преобразования эквивалентности	37
1.2.2. Замечания о группах эквивалентности	40
1.2.3. Пример применения группы эквивалентности	42
1.3. Многопараметрические группы Ли преобразований	45
1.4. Инвариантные и частично инвариантные решения	46
1.4.1. Основные определения	46
1.4.2. Пример построения инвариантных решений	49
1.4.3. Частично инвариантные решения	50
1.5. Библиографический список	52
Глава 2. МЕТОДЫ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА И ПОСТРОЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬ- НЫМИ ОПЕРАТОРАМИ	53
2.1. Интегро-дифференциальные уравнения в математике и приложениях	53
2.2. Обзор методов построения инвариантных решений КУ	54
2.2.1. Методы на основе априорного постулирования вида решения или представления допустимой группы Ли	55
2.2.2. Метод моментов	72
2.2.3. Методы, использующие переход к эквивалентным дифференци- альным уравнениям	78
2.3. Универсальный метод вычисления симметрий уравнений с нелокаль- ными операторами	90
2.4. Примеры применения метода для уравнений с нелокальными операто- рами	93

2.4.1. Фурье-образ пространственно однородного изотропного уравнения Больцмана	93
2.4.2. Уравнения одномерного движения вязкоупругого континуума	100
2.5. Библиографический список	106
Глава 3. СИММЕТРИИ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА И ЕГО МОДЕЛЕЙ	111
3.1. Исследования инвариантных решений уравнения Больцмана	111
3.2. Структура уравнения Больцмана	113
3.3. Групповой анализ полного уравнения Больцмана	115
3.3.1. Допустимые алгебры Ли	115
3.3.2. Изоморфизм алгебр	120
3.3.3. Инвариантные решения полного уравнения Больцмана	123
3.3.4. Классификация инвариантных решений представления Фурье полного уравнения Больцмана	125
3.4. Полный групповой анализ некоторых кинетических уравнений	127
3.4.1. Уравнение Больцмана с приближенным асимптотическим интегралом столкновений	127
3.4.2. Кинетическое уравнение Смолуховского	129
3.4.3. Система пространственно однородных кинетических уравнений Больцмана	131
3.4.4. Однородная релаксация в модели бинарной смеси газов	140
3.5. Приложение 1	143
3.6. Библиографический список	147
Глава 4. ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА ...	150
4.1. Метод частичной групповой классификации уравнений относительно функции источника	150
4.2. Классификация изотропного уравнения Больцмана относительно функции источника	156
4.2.1. Случай автономного источника	156
4.2.2. Случай неавтономного источника	166
4.3. Классификация полного уравнения Больцмана относительно функции источника	175
4.4. Приложения	183
4.4.1. Переход к цилиндрическим координатам	183
4.4.2. Переход к сферическим координатам	185
4.4.3. Групповая классификация полного уравнения Больцмана с функцией источника	186
4.4.4. Представление инвариантных решений	200
4.5. Библиографический список	209
Глава 5. СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ	212
5.1. Математическая модель	212
5.2. Определение и инфинитезимальный критерий	216
5.2.1. Определение группы симметрии	216

5.2.2. Вариационная производная для функционалов	217
5.2.3. Инфинитезимальный критерий	218
5.2.4. Продолжение симметрии на нелокальные переменные	220
5.3. Симметрия уравнений кинетики плазмы в одномерном приближении	220
5.3.1. Нерелятивистский электронный газ в одномерном приближении	221
5.3.2. Релятивистский электронный газ	230
5.3.3. Бесстолкновительная нерелятивистская электрон-ионная плазма	233
5.3.4. Бесстолкновительная релятивистская электрон-ионная плазма	234
5.3.5. Кинетика нерелятивистской электронной плазмы с движущимся постоянным и однородным ионным фоном	235
5.3.6. Кинетика нерелятивистской электронной плазмы с движущимся ионным фоном	237
5.3.7. Нерелятивистская электрон-ионная плазма в квазинейтральном приближении	238
5.4. Групповой анализ трехмерных кинетических уравнений плазмы	239
5.4.1. Релятивистский электронный газ	240
5.4.2. Кинетические уравнения релятивистской электрон-ионной плазмы	243
5.5. Симметрия уравнений Власова — Максвелла в лагранжевых перемен- ных	244
5.6. Уравнения власовского типа: симметрия уравнений Бенни	247
5.6.1. Различные формы уравнений Бенни	247
5.6.2. Подгруппа Ли и группа Ли — Беклунда: формулировка задачи	248
5.6.3. Неполнота точечной группы: формулировка проблемы	249
5.6.4. Определяющие уравнения и их решение	250
5.6.5. Обсуждение решения определяющих уравнений	252
5.6.6. Пример, иллюстрирующий вычисление матричных элементов ...	255
5.7. Приложение симметрий в задачах кинетической теории плазмы. Ре- нормгрупповые симметрии для краевых задач и функционалов от ре- шений	258
5.7.1. Введение в ренормгрупповые симметрии	258
5.7.2. PГ-симметрия: идея построения и ее простая реализация	260
5.7.3. Ренормгрупповой алгоритм	264
5.7.4. Примеры PГ-симметрий в теории плазмы	268
5.8. Нелинейный перенос тепла: симметрия уравнений столкновительной плазмы	283
5.8.1. Кинетическое уравнение для электронов	284
5.8.2. Алгебра допустимых операторов	285
5.8.3. Оптимальная система подалгебр	286
5.8.4. Представление инвариантных решений	287
5.8.5. Одномерные подалгебры	288
5.8.6. Двумерные подалгебры	291
5.8.7. Стационарный нелинейный теплоперенос	295
5.9. Библиографический список	298
Глава 6. СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ...	302
6.1. Уравнения с запаздыванием в моделировании	303

6.2. Математический аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием	304
6.3. Об определении допустимой группы	306
6.3.1. Пример построения определяющих уравнений	307
6.3.2. Допустимая группа Ли	307
6.3.3. Симметрии модельного уравнения	309
6.3.4. Дифференциально-разностные уравнения	310
6.4. Группа эквивалентности для уравнений с запаздыванием	311
6.4.1. Представление определяющих уравнений группы эквивалентности дифференциальных уравнений через оператор Ли — Беклунда	312
6.4.2. Потенциальные группы эквивалентности дифференциальных уравнений с запаздыванием	314
6.5. Уравнение реакции-диффузии с запаздыванием	315
6.5.1. Задача Коши	316
6.5.2. Группа эквивалентности	316
6.5.3. Допустимая группа Ли	318
6.5.4. Краткий итог групповой классификации	330
6.5.5. Инвариантные решения	332
6.6. Нелинейное уравнение Клейна — Гордона с запаздыванием	333
6.6.1. Нестационарное запаздывание	334
6.6.2. Групповая классификация уравнения Клейна — Гордона	338
6.6.3. Результаты групповой классификации	340
6.7. Библиографический список	348
Глава 7. СИММЕТРИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	350
7.1. Стохастическое интегрирование	351
7.1.1. Случайные процессы	351
7.1.2. Интеграл Ито	352
7.1.3. Формула Ито	354
7.1.4. Замена времени в стохастических интегралах	355
7.2. Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения	356
7.2.1. Уравнения Ито	356
7.2.2. Уравнения Стратоновича	357
7.2.3. Уравнения Колмогорова	358
7.3. Линеаризация СОДУ первого порядка	359
7.3.1. Слабая линеаризация	361
7.3.2. Сильная линеаризация СОДУ первого порядка	362
7.4. Сильная линеаризация СОДУ второго порядка	367
7.5. Критерии линеаризации систем СОДУ второго порядка	368
7.5.1. Преобразование эквивалентности	369
7.5.2. Получение критериев линеаризации	370
7.5.3. Примеры линеаризации	378
7.6. Преобразования автономных СОДУ первого порядка	381
7.6.1. Допустимые преобразования	382

7.6.2. Системы автономных СОДУ первого порядка	387
7.7. Группы Ли преобразований стохастических уравнений	390
7.7.1. Краткий исторический обзор	390
7.7.2. Допустимая группа Ли и определяющие уравнения	392
7.8. Допустимые группы преобразований Ли автономных СОДУ	396
7.8.1. Определяющие уравнения	397
7.8.2. Допустимая группа Ли геометрического винеровского процесса	399
7.9. Группы преобразований Ли некоторых СОДУ	402
7.9.1. Геометрический винеровский процесс	402
7.9.2. Линейная система в узком смысле	404
7.9.3. Модель Блэка — Шоулза	406
7.9.4. Нелинейная система Ито	407
7.10. Применение группового анализа к стохастическим уравнениям гид- рогазодинамики	408
7.10.1. Определяющие уравнения	409
7.10.2. Групповой анализ стохастических уравнений газовой динамики	416
7.10.3. Групповой анализ стохастических уравнений Навье — Стокса	420
7.10.4. Обсуждение полученных результатов	424
7.11. Потраекторный подход к построению допустимой группы	424
7.11.1. Предварительные сведения	424
7.11.2. Простейшее стохастическое дифференциальное уравнение и его допустимые группы Ли	428
7.11.3. Связь между группами преобразований	430
7.12. Библиографический список	433