

Н. А. ГРОМОВ

**КОНТРАКЦИИ  
КЛАССИЧЕСКИХ  
И  
КВАНТОВЫХ  
ГРУПП**

$$G_q \rightarrow G_z(j; \sigma)$$



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
КОМИ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

Н. А. ГРОМОВ

**КОНТРАКЦИИ  
КЛАССИЧЕСКИХ  
И  
КВАНТОВЫХ  
ГРУПП**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2012

УДК 530.1, 512.81  
ББК 22.31, 22.311  
Г 87

Громов Н. А. **Контракции классических и квантовых групп.** М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — ISBN 978-5-9221-1398-4. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2012. ISBN 978-5-7691-2325-2.

Монография посвящена описанию метода контракций (предельных переходов) в применении к алгебраическим структурам: классическим группам Ли и алгебрам Ли ортогональной, унитарной и симплектической серий и их квантовым аналогам, алгебре Вирасоро, супералгебрам. В отличие от стандартного подхода Вигнера–Иненю, основанного на введении в группу (алгебру) одного или нескольких стремящихся к нулю параметров, используется альтернативный подход, связанный с исследованием алгебраических структур над алгебрами с нильпотентными коммутативными образующими. Изучены многомерные контракции неприводимых представлений унитарных и ортогональных алгебр в базе Гельфанда–Цетлина, представлений алгебры Вирасоро и классических супералгебр. В качестве приложения развитого подхода рассмотрены переходы между группами движений (и их алгебрами Ли) кинематик, т.е. моделей пространства–времени, а также предельный случай стандартной электрослабой модели, отвечающей контракции ее калибровочной группы, который позволил объяснить редкое взаимодействие нейтрино с веществом.

Построены квантовые ортогональные, унитарные и симплектические группы Кэли–Клейна. Квантовые аналоги неполупростых алгебр получаются как двойственные объекты к квантовым группам, а также контракциями квантовых деформаций универсальных обертывающих алгебр для алгебр Ли. Подробно рассмотрены некоммутативные квантовые модели релятивистских и нерелятивистских кинематик.

Монография охватывает основные области применения метода контракций и представляет интерес для специалистов в области теории групп и алгебр Ли, а также для исследователей в области физики, использующих теоретико-групповые методы.



Уральское  
отделение РАН

ISBN 978-5-9221-1398-4

ISBN 978-5-7691-2325-2

© РИО УрО РАН, 2012

© ФИЗМАТЛИТ, 2012

© Н. А. Громов, 2012

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	9
-----------------------	---

### Часть I. Контракции классических групп и супергрупп

Глава 1. Группы и алгебры Кэли–Клейна . . . . .	17
1.1. Дуальные числа и алгебра Пименова . . . . .	17
1.1.1. Дуальные числа (17). 1.1.2. Алгебра Пименова (18).	
1.2. Ортогональные группы и алгебры Кэли–Клейна . . . . .	20
1.2.1. Три фундаментальные геометрии на прямой (20). 1.2.2. Де- вять групп Кэли–Клейна (23). 1.2.3. Обобщение на высшие раз- мерности (28).	
1.3. Унитарные группы и алгебры Кэли–Клейна . . . . .	31
1.3.1. Определение, генераторы, коммутаторы (31). 1.3.2. Уни- тарная группа $SU(2; j_1)$ (33). 1.3.3. Представления группы $SU(2; j_1)$ (34). 1.3.4. Унитарная группа $SU(3; j)$ (39). 1.3.5. Ин- вариантные операторы (42).	
1.4. Симплектические группы и алгебры Кэли–Клейна . . . . .	43
1.4.1. Определение, генераторы, коммутаторы (43). 1.4.2. Инвари- антные операторы (44).	
1.5. Классификация переходов между группами . . . . .	45
Глава 2. Модели пространства–времени . . . . .	48
2.1. Кинематические группы . . . . .	48
2.1.1. Кинематики как пространства постоянной кривизны (48).	
2.2. Кинематики Кэрролла . . . . .	50
2.3. Нерелятивистские кинематики . . . . .	55



<b>Глава 3. Представления алгебр Кэли–Клейна в базисе Гельфанда–Цетлина</b> . . . . .	58
3.1. Представления унитарных алгебр $u(2; j_1)$ и $su(2; j_1)$ . . . . .	58
3.1.1. Конечномерные неприводимые представления алгебр $u(2)$ и $su(2)$ (58). 3.1.2. Переход к представлениям алгебр $u(2; j_1)$ и $su(2; j_1)$ (59). 3.1.3. Контракция неприводимых представлений (61). 3.1.4. Аналитическое продолжение неприводимых представлений (62).	
3.2. Представления унитарных алгебр $u(3; j_1, j_2)$ . . . . .	64
3.2.1. Описание представлений (64). 3.2.2. Контракция по первому параметру (68). 3.2.3. Контракция по второму параметру (69). 3.2.4. Двумерная контракция (72).	
3.3. Представления унитарных алгебр $u(n; j)$ . . . . .	73
3.3.1. Операторы представления (73). 3.3.2. Спектр операторов Казимира (76). 3.3.3. Возможные варианты контракций неприводимых представлений (78).	
3.4. Представления ортогональных алгебр . . . . .	79
3.4.1. Алгебра $so(3; j)$ (79). 3.4.2. Алгебра $so(4; j)$ (81). 3.4.3. Контракции представлений алгебры $so(4; j)$ (84). 3.4.4. Алгебра $so(n; j)$ (88).	
<b>Глава 4. Элементы полуримановой геометрии</b> . . . . .	93
4.1. Геометрическое моделирование физических величин . . . . .	93
4.2. Расслоенная полуриманова геометрия $\mathbf{V}_n^m$ . . . . .	95
4.2.1. Метрика и инварианты (95). 4.2.2. Одинаковые перпендикуляры к слою (97). 4.2.3. Геометрический смысл недиагональных компонент метрического тензора (98).	
4.3. Полуриманово пространство $\mathbf{V}_n^m$ с нильпотентными координатами	100
4.4. Полуриманова геометрия ${}^3\mathbf{V}_5^4$ как пространство–время–электричество . . . . .	102
4.4.1. Определение полуриманова пространства ${}^3\mathbf{V}_5^4$ (102). 4.4.2. Интерпретация полувеклидовой геометрии ${}^3\mathbf{R}_5^4$ как классической электродинамики (103). 4.4.3. Полуриманово пространство ${}^3\mathbf{V}_5^4$ как пространство–время–электричество (106). 4.4.4. Сравнение с моделями типа Калуцы–Клейна (107). 4.4.5. Заключительные замечания (108).	
<b>Глава 5. Градуированные контракции алгебры Вирасоро</b> . . . . .	109
5.1. Градуированные контракции алгебр Ли и их представлений . . . . .	109
5.2. Градуировка алгебры Вирасоро . . . . .	110
5.3. Приводимость представлений алгебры Вирасоро . . . . .	111
5.4. $\mathbb{Z}_2$ -градуированные контракции алгебры Вирасоро и ее представлений . . . . .	113

Глава 6. Геометрия аффинных корневых систем . . . . .	117
6.1. Простые алгебры Ли и аффинные алгебры Каца–Мууди . . . . .	118
6.2. Вырожденные корневые системы . . . . .	120
Глава 7. Контракции классических супералгебр и их представлений . . . . .	127
7.1. Предварительные замечания . . . . .	127
7.2. Ортосимплектические супералгебры $osp(m; j 2n; \omega)$ . . . . .	128
7.2.1. Ортосимплектические супералгебра $osp(m 2n)$ и супергруппа $OSP(m 2n)$ (129). 7.2.2. Ортосимплектические супералгебры Кэли–Клейна $osp(m; j 2n; \omega)$ (130). 7.2.3. Пример: контракции супералгебры $osp(3 2)$ (131).	
7.3. Унитарные супералгебры $sl(m; j n; \varepsilon)$ . . . . .	132
7.3.1. Унитарная супералгебра $sl(m n)$ (132). 7.3.2. Унитарные супералгебры Кэли–Клейна $sl(m; j n; \varepsilon)$ (133). 7.3.3. Пример: контракции алгебры $sl(2 1)$ (134).	
7.4. Операторы Казимира . . . . .	135
7.4.1. Операторы Казимира супералгебр $sl(m n)$ и $osp(m n)$ (136).	
7.4.2. Операторы Казимира супералгебры $sl(m; j n; \varepsilon)$ (136).	
7.4.3. Операторы Казимира супералгебры $osp(m; j 2n; \omega)$ (138).	
7.5. Контракции представлений $osp(1 2)$ . . . . .	138
7.5.1. Представления супералгебры $osp(1 2)$ (138). 7.5.2. Представления супералгебры $osp(1 2; j)$ (139). 7.5.3. Представления супералгебры Евклида (140). 7.5.4. Представления супералгебры Галилея (141).	
Глава 8. Контракция электрослабой модели и взаимодействие нейтрино с веществом . . . . .	142
8.1. Стандартная электрослабая модель . . . . .	142
8.2. Электрослабая модель с contracting калибровочной группой . . . . .	147
8.3. Описание физических систем и контракции групп . . . . .	150
8.4. Редкое взаимодействие нейтрино с веществом . . . . .	151

## Часть II. Контракции квантовых групп

Глава 9. Квантовые ортогональные группы Кэли–Клейна . . . . .	157
9.1. Линейные преобразования образующих квантовых групп Ли и квантовых векторных пространств . . . . .	157
9.2. Квантовые ортогональные группы в декартовых образующих . . . . .	161
9.2.1. Основные определения (161). 9.2.2. Квантовая группа $SO_q(3)$ в симплектических и декартовых образующих (165).	
9.3. Квантовые группы Кэли–Клейна $SO_z(N; j)$ . . . . .	168

9.3.1. Преобразование квантовой ортогональной группы в квантовую группу Кэли–Клейна (168).	
9.3.2. Квантовые группы $SO_z(3; j)$ (170).	
9.3.3. Квантовая группа Евклида $E_z^0(2)$ (172).	
9.3.4. Квантовая группа Ньютона $N_z^0(2)$ (173).	
9.3.5. Квантовая группа Галилея $G_z^0(2)$ (174).	
9.4. Квантовые группы евклидова типа $SO_z(N; \iota_1)$ . . . . .	175
9.4.1. Переход к новому базису (175).	
9.4.2. Контракция $j_1 = \iota_1$ (177).	
9.4.3. Квантовые евклидовы группы Кэли–Клейна (178).	
9.4.4. Квантовая группа $E_v(2; j_2)$ евклидова типа (179).	
9.5. Квантовые алгебры $so_z(N; j)$ как двойственные к $SO_z(N; j)$ . . . . .	180
9.5.1. Определения (180).	
9.5.2. Пример: $SO_z(3; j)$ и $so_z(3; j)$ (181).	
<b>Глава 10. Квантовые ортогональные алгебры Кэли–Клейна во вращательном базисе</b> . . . . .	<b>184</b>
10.1. Рекурсивный метод построения квантовой структуры евклидовых алгебр . . . . .	184
10.1.1. Классические евклидовы алгебры $so(N + 1; \iota_1)$ (184).	
10.1.2. Квантовые евклидовы алгебры $so_z(N + 1; \iota_1)$ (185).	
10.2. Квантовые евклидовы алгебры Кэли–Клейна . . . . .	187
10.3. Разные сочетания контракций Кэли–Клейна и структуры алгебры Хопфа для алгебр $so_z(3; j; \sigma)$ . . . . .	188
10.3.1. Квантовые алгебры $so_z(3; j; X_{02})$ (188).	
10.3.2. Квантовые алгебры $so_z(3; j; \sigma)$ (189).	
10.3.3. Квантовые алгебры $so_z(3; j; X_{01})$ (191).	
10.3.4. Квантовые алгебры $so_z(3; j; X_{12})$ (191).	
10.3.5. Квантовые алгебры Евклида $e_z(2)$ (192).	
10.3.6. Квантовые алгебры Ньютона $n_z(2)$ (192).	
10.3.7. Квантовые алгебры Галилея $g_z(2)$ (193).	
10.4. Квантовые алгебры Кэли–Клейна $so_z(4; j; \sigma)$ . . . . .	194
10.4.1. Квантовые алгебры $so_z(4; X_{03}, X_{12})$ (194).	
10.4.2. Квантовые алгебры $so_z(4; j; X_{03}, X_{12})$ (195).	
10.4.3. Квантовые алгебры $so_z(4; j; \sigma)$ (196).	
10.4.4. Квантовые алгебры $so_z(4; j; X_{01}, X_{23})$ (198).	
10.4.5. Квантовые алгебры Пуанкаре $p_z(3)$ (199).	
10.5. Квантовые евклидовы алгебры Кэли–Клейна $so_z(N + 1; \iota_1, j'; \sigma)$ . . . . .	201
10.6. Квантовые деформации кинематических алгебр. . . . .	202
10.6.1. Квантовые алгебры Пуанкаре $p_z(3 + 1; P_3, K_1)$ и Галилея $g_z(3 + 1; P_3, K_1)$ (202).	
10.6.2. Квантовые алгебры Пуанкаре $p_z(3 + 1; H, J_1)$ и Галилея $g_z(3 + 1; H, J_1)$ (204).	
<b>Глава 11. Квантовые группы Кэли–Клейна <math>SO_z(N; j; \sigma)</math></b> . . . . .	<b>205</b>
11.1. $SO_z(N; j; \sigma)$ в симплектическом базисе . . . . .	205
11.1.1. Ортогональные группы Кэли–Клейна в симплектическом базисе (205).	
11.1.2. Симплектические образующие (208).	

11.2. Квантовые группы $SO_z(N; j; \sigma)$ в декартовых образующих . . . . .	209
11.2.1. Формальное определение (209). 11.2.2. Анализ структуры алгебры Хопфа и условия $(z, j)$ -ортогональности (209).	
11.3. Неизоморфные контрактированные квантовые группы . . . . .	212
11.4. Квантовые группы $SO_z(3; j; \sigma)$ . . . . .	214
11.4.1. Квантовые группы $SO_z(3; j; \sigma)$ (214). 11.4.2. Квантовые группы $SO_z(3; j; \sigma_I)$ (217).	
11.5. Квантовые группы $SO_z(4; j; \sigma)$ и $SO_z(5; j; \sigma)$ . . . . .	220
11.5.1. Квантовые группы $SO_z(4; j; \sigma)$ (220). 11.5.2. Квантовые группы $SO_z(5; j; \sigma)$ (221).	
<b>Глава 12. Квантовые унитарные группы Кэли–Клейна . . . . .</b>	<b>224</b>
12.1. Квантовые группы $SL_q(N)$ и $SU_q(N)$ . . . . .	224
12.2. Квантовые группы $SL_q(2)$ и $SU_q(2)$ . . . . .	226
12.3. Квантовые группы $SL_q(3)$ и $SU_q(3)$ . . . . .	227
12.4. Квантовые группы $SL_q(N; j)$ и $SU_q(N; j)$ . . . . .	229
12.5. Контракция квантовой унитарной группы $SU_q(2; j_1)$ . . . . .	231
12.6. Контракции квантовой унитарной группы $SU_q(3; j_1, j_2)$ . . . . .	233
12.6.1. Контракция $j_1 = \iota_1$ (236). 12.6.2. Контракция $j_2 = \iota_2$ (237). 12.6.3. Двумерная контракция $j_1 = \iota_1, j_2 = \iota_2$ (238).	
12.7. Изоморфизм квантовых алгебр $su_v(2; j)$ и $so_z(3; j)$ . . . . .	240
12.7.1. Квантовая унитарная группа $SU_q(2)$ (240). 12.7.2. Алгебра $su_v(2; j)$ как двойственная к $SU_v(2; j)$ (241). 12.7.3. Изоморфизм $su_v(2; j)$ и $so_v(3; j)$ при разных сочетаниях схемы контракций Кэли–Клейна и структуры алгебры Хопфа (243). 12.7.4. Представления алгебры $su_z(2; j_1)$ в базисе Гельфанда–Цетлина (245).	
<b>Глава 13. Квантовые симплектические группы Кэли–Клейна . . . . .</b>	<b>247</b>
13.1. Квантовые симплектические группы и пространства . . . . .	247
13.2. Квантовые симплектические группы Кэли–Клейна . . . . .	249
13.2.1. Квантовая симплектическая группа $Sp_v^4(2; j_1)$ и квантовое симплектическое пространство $\mathbf{Sp}_v^4(j_1)$ (250). 13.2.2. Контрактированная квантовая группа $Sp_v(2; \iota_1)$ и квантовое расслоенное пространство $\mathbf{Sp}_v^4(\iota_1)$ (254).	
13.3. Разные комбинации квантовой структуры и схемы контракций Кэли–Клейна для симплектических групп и пространств . . . . .	255
13.3.1. Квантовая симплектическая группа $Sp_v(2; j_1; \sigma)$ и квантовое симплектическое пространство $\mathbf{Sp}_v^4(j_1; \sigma)$ (256). 13.3.2. Квантовая симплектическая группа $Sp_v(2; j_1; \hat{\sigma})$ и квантовое пространство $\mathbf{Sp}_v^4(j_1; \hat{\sigma})$ (261). 13.3.3. Контрактированная квантовая группа $Sp_v(2; \iota_1; \hat{\sigma})$ и квантовое расслоенное пространство $\mathbf{Sp}_v^4(\iota_1; \hat{\sigma})$ (263).	



<b>Глава 14. Квантовые аналоги пространств постоянной кривизны</b>	<b>265</b>
14.1. Квантовые ортогональные группы и квантовые пространства Кэли–Клейна	265
14.2. Квантовые векторные пространства Кэли–Клейна $\mathbf{O}_v^3(j; \sigma)$ и ортогональные сферы $\mathbf{S}_v^2(j; \sigma)$	268
14.2.1. Перестановка $\sigma_0 = (1, 2, 3)$ , множитель $J = j_1 j_2$ (269).	
14.2.2. Перестановка $\sigma' = (1, 3, 2)$ , множитель $J = j_1$ (271).	
14.2.3. Перестановка $\hat{\sigma} = (2, 1, 3)$ , множитель $J = j_1^2 j_2$ (272).	
14.3. Квантовые пространства $\mathbf{O}_v^4(j; \sigma)$ и $\mathbf{S}_v^3(j; \sigma)$	273
14.3.1. Квантовые аналоги $\mathbf{O}_v^4(j; \sigma)$ расслоенных пространств (274).	
14.3.2. Квантовые деформации пространств постоянной кривизны $\mathbf{S}_v^3(j; \sigma)$ (276).	
<b>Глава 15. Некоммутативные квантовые кинематики</b>	<b>279</b>
15.1. Обоснование некоммутативности пространственно-временных координат	279
15.2. Квантовые пространства $\mathbf{O}_v^5(j; \sigma)$	280
15.3. Квантовые кинематики (анти) де Ситтера	282
15.4. Квантовые кинематики Минковского.	286
15.5. Квантовые кинематики Ньютона.	287
15.6. Квантовые кинематики Галилея	288
15.7. Квантовые кинематики Кэрролла	288
<b>Приложение А. <math>R</math>-матрица квантовой группы <math>SO_q(N)</math> в декартовых образующих</b>	<b>292</b>
<b>Приложение Б. Антипод квантовой группы <math>SO_v(N; j; \sigma)</math> в декартовых образующих</b>	<b>293</b>
<b>Приложение В. Соотношения <math>(z, j)</math>-ортогональности квантовой группы <math>SO_z(N; j; \sigma)</math> в декартовых образующих</b>	<b>295</b>
Список литературы	300
Предметный указатель	311