

Ю. С. Ильяшенко  
С. Ю. Яковенко

**Аналитическая теория  
дифференциальных  
уравнений**

**Том 1**

Ю. С. Ильяшенко, С. Ю. Яковенко

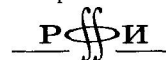
**Аналитическая теория  
дифференциальных уравнений**

**Том 1**

Москва  
Издательство МЦНМО  
2013

УДК 517.91  
ББК 22.161.6  
И49

Издание осуществлено при поддержке РФФИ  
(издательский проект № 12-01-07018-д)



**Ильяшенко Ю. С., Яковенко С. Ю.**  
И49 Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Том 1. —  
М.: МЦНМО, 2013. — 432 с.  
ISBN 978-5-4439-0230-2 (том 1)

Предлагаемая книга — первый том двухтомной монографии, посвящённой аналитической теории дифференциальных уравнений.

В первой части этого тома излагается формальная и аналитическая теория нормальных форм и теорема о разрешении особенностей для векторных полей на плоскости.

Вторая часть посвящена алгебраически разрешимым локальным задачам теории аналитических дифференциальных уравнений, квадратичным векторным полям и проблеме локальной классификации ростков векторных полей в комплексной области. Дано современное изложение работы Дюлака (1908) об условиях центра и классической работы Баутина о рождении не более чем трех предельных циклов при бифуркации особой точки квадратичного векторного поля типа центр. Изложена теория алгебраически разрешимых локальных задач и доказана алгебраическая неразрешимость проблемы различения центра и фокуса.

В третьей части изложена линейная теория: подход Арнольда к теории нормальных форм линейных систем с нелинейной точки зрения, проблема Римана — Гильберта, явление Стокса, теорема Сибуи о секториальной нормализации.

В приложениях приводится необходимый минимум сведений из теории римановых поверхностей и многомерного комплексного анализа.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных работников физико-математических специальностей.

ББК 22.161.6

Издание РФФИ не подлежит продаже.

*Юлий Сергеевич Ильяшенко  
Сергей Юрьевич Яковенко*

**Аналитическая теория  
дифференциальных уравнений**

Том 1

Подписано в печать 09.10.2013 г. Формат 70×100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 27. Тираж 400 экз. Заказ № 4356

Издательство Московского центра непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».  
121099, Москва, Шубинский пер., 6

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-72-85.  
E-mail: biblio@mccme.ru, <http://biblio.mccme.ru>

---

ISBN 978-5-4439-0214-2 (общий)  
978-5-4439-0230-2 (том 1) |

© Ильяшенко Ю. С.,  
Яковенко С. Ю., 2013  
© МЦНМО, 2013

# Оглавление

|                   |    |
|-------------------|----|
| Предисловие ..... | 11 |
|-------------------|----|

## Часть I

### НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И РАЗРЕШЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Глава 1. Аналитические дифференциальные уравнения в комплексной области .....</b> | <b>17</b> |
| § 1.1. Дифференциальные уравнения и их решения. Задача Коши .....                    | 17        |
| § 1.2. Принцип сжимающих отображений .....   | 18        |
| § 1.3. Применение принципа сжимающих отображений к оператору Пикара .....            | 19        |
| § 1.4. Линейные дифференциальные уравнения. Экспонента линейного оператора .....     | 22        |
| § 1.5. Теорема о выпрямлении .....   | 24        |
| § 1.6. Векторные поля. Эквивалентность векторных полей .....                         | 26        |
| § 1.7. Векторное поле как оператор дифференцирования .....                           | 27        |
| § 1.8. Выпрямление векторного поля .....   | 29        |
| § 1.9. Однопараметрические группы голоморфных отображений. Упражнения и задачи ..... | 29        |
| <b>Глава 2. Голоморфные слоения и их особые точки .....</b>                          | <b>32</b> |
| § 2.1. Основные определения .....  | 32        |
| § 2.2. Слоения и интегрируемые распределения .....                                   | 34        |
| § 2.3. Голономия .....   | 36        |
| § 2.4. Слоения с особенностями .....   | 39        |
| § 2.5. Комплексные сепаратрисы .....   | 42        |
| § 2.6. Надстройка над отображением в себя. Упражнения и задачи .....                 | 45        |
| <b>Глава 3. Формальные потоки и теорема о включении в поток .....</b>                | <b>48</b> |
| § 3.1. Формальные векторные поля и формальные отображения .....                      | 48        |
| § 3.2. Теорема об обратной функции .....   | 52        |
| § 3.3. Интегрирование и формальные потоки формальных векторных полей .....           | 53        |
| § 3.4. Включение в поток и матричные логарифмы .....                                 | 55        |
| § 3.5. Логарифмы и дифференциальные операторы .....                                  | 57        |
| § 3.6. Включение в формальный поток. Упражнения и задачи .....                       | 59        |
| <b>Глава 4. Формальные нормальные формы .....</b>                                    | <b>61</b> |
| § 4.1. Теорема о формальной классификации .....                                      | 61        |
| § 4.2. Шаг индукции: гомологическое уравнение .....                                  | 62        |

|   |            |
|---|------------|
| § 4.3. Разрешимость гомологического уравнения . . . . .   | 63         |
| § 4.4. Резонансные нормальные формы: парадигма Пуанкаре — Дюлака . .  | 65         |
| § 4.5. Теорема Белицкого . . . . .  | 67         |
| § 4.6. Параметрический случай . . . . .   | 71         |
| § 4.7. Формальная классификация формальных отображений . . . . .  | 73         |
| § 4.8. Каспидальные точки . . . . .   | 74         |
| § 4.9. Векторные поля с нулевой линейной частью . . . . .   | 76         |
| § 4.10. Формальные нормальные формы элементарных особых точек<br>на вещественной плоскости . . . . .                      | 78         |
| Упражнения и задачи . . . . .   | 82         |
| <b>Глава 5. Голоморфные нормальные формы . . . . .</b>  | <b>83</b>  |
| § 5.1. Области Пуанкаре и Зигеля . . . . .  | 83         |
| § 5.2. Голоморфная классификация в области Пуанкаре . . . . .   | 84         |
| § 5.3. Резонансный случай: полиномиальная нормальная форма . . . . .  | 89         |
| § 5.4. Голоморфные нормальные формы отображений . . . . .   | 91         |
| § 5.5. Приведение к линейной нормальной форме в области Зигеля:<br>теоремы Зигеля, Брюно и Йоккоза (мини-обзор) . . . . . | 93         |
| § 5.6. Гомотопический метод . . . . .   | 95         |
| § 5.7. Альтернатива для расходимости нормализующего ряда . . . . .  | 99         |
| § 5.8. Ёмкость и неравенство Бернштейна . . . . .   | 102        |
| Упражнения и задачи . . . . .   | 103        |
| <b>Глава 6. Конечно порождённые группы ростков<br/>конформных отображений . . . . .</b>                                   | <b>105</b> |
| § 6.1. Эквивалентность конечно порождённых групп ростков<br>конформных отображений . . . . .                              | 105        |
| § 6.2. Первые шаги формальной классификации . . . . .   | 108        |
| § 6.3. Интегрируемые ростки . . . . .   | 115        |
| § 6.4. Динамика конечно порождённых групп ростков и псевдогруппы . . .  | 117        |
| § 6.5. Периодические орбиты и периодические ростки . . . . .  | 119        |
| § 6.6. Замыкание псевдогруппы и плотность орбит . . . . .   | 121        |
| § 6.7. Счётное число предельных циклов для типичных псевдогрупп . . . . .   | 123        |
| § 6.8. Жёсткость конечно порождённых групп конформных ростков . . . . .   | 124        |
| § 6.9. Ослабление условий типичности . . . . .  | 128        |
| Упражнения и задачи . . . . .   | 129        |
| <b>Глава 7. Голоморфные инвариантные многообразия . . . . .</b>   | <b>130</b> |
| § 7.1. Инвариантные многообразия для гиперболических особых точек . .   | 130        |
| § 7.2. Гиперболические инвариантные кривые для седлоузлов . . . . .   | 134        |
| Упражнения и задачи . . . . .   | 136        |
| <b>Глава 8. Разрешение особенностей на плоскости . . . . .</b>  | <b>138</b> |
| § 8.1. Полярное раздутие . . . . .  | 138        |
| § 8.2. Алгебраическое раздутие ( $\sigma$ -процесс) . . . . .   | 140        |
| § 8.3. Раздутие аналитических кривых и слоений с особенностями . . . . .  | 143        |
| § 8.4. Теорема о разрешении особенностей . . . . .  | 145        |
| § 8.5. Раздутие в аффинной карте: вычисления . . . . .  | 147        |
| § 8.6. Дивизоры . . . . .   | 149        |
| § 8.7. Кратность пересечения и индекс пересечения . . . . .   | 151        |
| § 8.8. Раздутие и индекс пересечения . . . . .  | 156        |
| § 8.9. Раздутие и кратность слоений с особенностями . . . . .   | 160        |

|  |     |
|--|-----|
| § 8.10. Разрешение каспидальных точек . . . . .  | 162 |
| § 8.11. Заключительные замечания: уничтожение резонансных узлов<br>и дикритических касаний . . . . . | 165 |
| Упражнения и задачи . . . . .  | 167 |

## Часть II

### ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

|  |            |
|--|------------|
| <b>Глава 9. Векторные поля на плоскости<br/>с характеристическими траекториями . . . . .</b>                                 | <b>171</b> |
| § 9.1. Первые шаги: классификация Пуанкаре . . . . .   | 171        |
| § 9.2. Секториальное разбиение окрестностей неэлементарных<br>особых точек . . . . .   | 173        |
| § 9.3. Монодромные особые точки, характеристические орбиты,<br>предельные циклы . . . . .                                    | 174        |
| § 9.4. Основная альтернатива и топологическая классификация особых<br>точек с характеристическими орбитами . . . . .         | 176        |
| § 9.5. Три вопроса . . . . .   | 179        |
| § 9.6. Три кошмара . . . . .   | 179        |
| § 9.7. Алгебраическая разрешимость . . . . .   | 181        |
| § 9.8. Разрешимость проблемы вычисления кратности . . . . .  | 182        |
| § 9.9. Алгебраическая разрешимость основной альтернативы . . . . .   | 183        |
| § 9.10. Топологически достаточные струи . . . . .  | 185        |
| § 9.11. Вывод . . . . .  | 186        |
| Упражнения и задачи . . . . .  | 186        |
| <b>Глава 10. Алгебраическая разрешимость локальных задач.<br/>Проблема различения центра и фокуса . . . . .</b>              | <b>188</b> |
| § 10.1. Разрешимость в пространствах струй: терминология . . . . .   | 189        |
| § 10.2. Топологическая классификация вырожденных элементарных<br>особенностей на плоскости . . . . .                         | 191        |
| § 10.3. Обобщённые эллиптические точки и проблема различения<br>центра и фокуса . . . . .                                    | 194        |
| § 10.4. Вычисление отображения голономии . . . . .   | 196        |
| § 10.5. Почти алгебраическая разрешимость проблемы различения центра<br>и фокуса в обобщённом эллиптическом случае . . . . . | 199        |
| § 10.6. Разрешимость до коразмерности 1 . . . . .  | 200        |
| § 10.7. Неразрешимость проблемы устойчивости для слабого фокуса . . . . .  | 201        |
| Упражнения и задачи . . . . .  | 206        |
| <b>Глава 11. Голономия и первые интегралы . . . . .</b>  | <b>208</b> |
| § 11.1. Проблема интегрируемости и её разрешимость . . . . .   | 208        |
| § 11.2. Интегрируемость вещественных слоений . . . . .   | 210        |
| § 11.3. Исчезающая голономия особой точки слоения . . . . .  | 212        |
| § 11.4. Топология комплексных слоений и (не)интегрируемость<br>элементарных особенностей . . . . .                           | 213        |
| § 11.5. Теорема Пуанкаре — Ляпунова: доказательство и (контр)примеры . . . . .   | 217        |
| § 11.6. Простые слоения на $(\mathbb{C}^2, 0)$ . . . . .   | 220        |

|   |            |
|---|------------|
| § 11.7. Обзор дальнейших результатов . . . . .  | 223        |
| Упражнения и задачи . . . . .   | 228        |
| <b>Глава 12. Нули аналитических функций, зависящих от параметров, и малые предельные циклы . . . . .</b>                        | <b>230</b> |
| § 12.1. Бифуркация Пуанкаре — Андронова — Хопфа — Такенса: малые предельные циклы, рождающиеся из эллиптических точек . . . . . | 230        |
| § 12.2. Идеал Баутина и производящие функции . . . . .  | 232        |
| § 12.3. Начала формальной теории . . . . .  | 234        |
| § 12.4. Идеал Баутина сходящегося ряда . . . . .  | 238        |
| § 12.5. Индекс Баутина и цикличность . . . . .  | 241        |
| § 12.6. Эллиптические векторные поля на плоскости: идеалы Баутина и Дюлака . . . . .  | 245        |
| § 12.7. Универсальные полиномиальные семейства, цикличность и локализованная проблема Гильберта . . . . .                       | 251        |
| Упражнения и задачи . . . . .   | 254        |
| <b>Глава 13. Квадратичные векторные поля и теорема Баутина . . . . .</b>  | <b>255</b> |
| § 13.1. Квадратичные векторные поля . . . . .   | 255        |
| § 13.2. Условия Дюлака на центр . . . . .   | 257        |
| § 13.3. Неприводимые компоненты многообразия Дюлака . . . . .   | 258        |
| § 13.4. Доказательство теоремы Дюлака 13.3 . . . . .  | 259        |
| § 13.5. Символьные вычисления и «доказательство» теоремы Жолондека 13.4 . . . . .   | 262        |
| § 13.6. Завершающие замечания . . . . .   | 263        |
| Упражнения и задачи . . . . .   | 264        |
| <b>Глава 14. Комплексные сепаратрисы голоморфных слоений . . . . .</b>  | <b>265</b> |
| § 14.1. Инвариантные кривые . . . . .   | 265        |
| § 14.2. Линеаризация вдоль инвариантных кривых и индекс комплексной сепаратрисы . . . . .                                       | 266        |
| § 14.3. Суммарный индекс вдоль гладкой компактной инвариантной кривой . . . . .   | 269        |
| § 14.4. Индекс и раздутие . . . . .   | 271        |
| § 14.5. Точки Кано . . . . .  | 271        |
| § 14.6. Доказательство теоремы Камачо — Сада . . . . .  | 274        |
| § 14.7. Локальная проблема Пуанкаре . . . . .   | 274        |
| § 14.8. Вес компоненты исчезающего дивизора . . . . .   | 276        |
| § 14.9. Взвешенная сумма порядков малости . . . . .   | 279        |
| § 14.10. Минимальность интегрируемых слоений . . . . .  | 282        |
| Упражнения и задачи . . . . .   | 285        |

### Часть III

#### ЛОКАЛЬНАЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

|  |            |
|--|------------|
| <b>Глава 15. Общие факты о линейных системах . . . . .</b>                               | <b>289</b> |
| § 15.1. Линейные дифференциальные уравнения: пфаффовы, обыкновенные, матричные . . . . . | 289        |
| § 15.2. Фундаментальные системы решений . . . . .  | 290        |
| § 15.3. Монодромия и голономия . . . . .   | 293        |

|  |            |
|--|------------|
| § 15.4. Калибровочное преобразование и голоморфная эквивалентность . . .             | 294        |
| § 15.5. Системы с изолированными особыми точками . . . . .                           | 295        |
| Упражнения и задачи . . . . .  | 296        |
| <b>Глава 16. Локальная теория регулярных особых точек</b>                            |            |
| <b>и её приложения . . . . .</b>   | <b>298</b> |
| § 16.1. Регулярные особенности . . . . .   | 298        |
| § 16.2. Фуксовы особые точки . . . . .   | 301        |
| § 16.3. Формальная классификация фуксовых особенностей . . . . .                     | 301        |
| § 16.4. Голоморфная классификация фуксовых особенностей . . . . .                    | 304        |
| § 16.5. Интегрируемость нормальных форм . . . . .                                    | 306        |
| § 16.6. Дальнейшее упрощение нормальной формы фуксовых систем . . . . .              | 307        |
| § 16.7. Нелокальная теория линейных систем на сфере $\mathbb{P}^2$ :                 |            |
| теорема Римана — Фукса . . . . .   | 308        |
| § 16.8. Фуксовы системы и проблема Римана — Гильберта . . . . .                      | 309        |
| § 16.9. Определитель Вронского инвариантной подсистемы . . . . .                     | 313        |
| § 16.10. Монополи . . . . .  | 313        |
| Упражнения и задачи . . . . .  | 317        |
| <b>Глава 17. Глобальная теория линейных систем: голоморфные</b>                      |            |
| <b>векторные расслоения и мероморфная связность . . . . .</b>                        | <b>318</b> |
| § 17.1. Голоморфное векторное расслоение . . . . .                                   | 318        |
| § 17.2. Коциклы . . . . .  | 320        |
| § 17.3. Операции над расслоениями . . . . .  | 322        |
| § 17.4. Классификация линейных расслоений над сферой Римана . . . . .                | 324        |
| § 17.5. Сечения голоморфных векторных расслоений . . . . .                           | 327        |
| § 17.6. Степень голоморфного расслоения . . . . .                                    | 328        |
| § 17.7. Голоморфная и мероморфная связность . . . . .                                | 330        |
| § 17.8. Связности и линейные системы . . . . .                                       | 331        |
| § 17.9. Связности линейных расслоений. След мероморфной связности . . . . .          | 334        |
| § 17.10. Классификация голоморфных векторных расслоений над $\mathbb{P}^2$ . . . . . | 336        |
| Упражнения и задачи . . . . .  | 342        |
| <b>Глава 18. Проблема Римана — Гильберта . . . . .</b>                               | <b>345</b> |
| § 18.1. Проблема Римана — Гильберта для абстрактных расслоений . . . . .             | 346        |
| § 18.2. Связности на тривиальном расслоении . . . . .                                | 349        |
| § 18.3. Инвариантные подрасслоения и неприводимость . . . . .                        | 351        |
| § 18.4. Теорема Болибруха — Костова . . . . .  | 355        |
| § 18.5. Контрпример Болибруха . . . . .  | 357        |
| Упражнения и задачи . . . . .  | 360        |
| <b>Глава 19. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков . . . . .</b>       | <b>362</b> |
| § 19.1. Дифференциальные уравнения высших порядков:                                  |            |
| алгебраическая теория . . . . .  | 362        |
| § 19.2. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения:                            |            |
| наивный подход . . . . .   | 364        |
| § 19.3. Факторизация дифференциальных операторов . . . . .                           | 367        |
| § 19.4. Фуксовы особенности уравнений высших порядков . . . . .                      | 371        |
| § 19.5. Струйные расслоения и инвариантные конструкции . . . . .                     | 373        |
| § 19.6. Проблема Римана — Гильберта для уравнений высших порядков . . . . .          | 378        |
| Упражнения и задачи . . . . .  | 382        |



|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава 20. Иррегулярные особенности и явление Стокса</b> . . . . .                      | <b>384</b> |
| § 20.1. Иррегулярные особые точки в размерности 1 . . . . .                               | 384        |
| § 20.2. Стандартная форма Биркгофа . . . . .  | 385        |
| § 20.3. Резонансы и формальная диагонализация . . . . .                                   | 388        |
| § 20.4. Формальное упрощение резонансного случая . . . . .                                | 389        |
| § 20.5. Срезающее преобразование и разветвлённая формальная<br>нормальная форма . . . . . | 390        |
| § 20.6. Голоморфная секториальная нормализация . . . . .                                  | 392        |
| § 20.7. Секториальные автоморфизмы и матрицы Стокса . . . . .                             | 393        |
| § 20.8. Явление Стокса. Голоморфная классификация<br>иррегулярных особенностей . . . . .  | 394        |
| § 20.9. Теорема реализуемости . . . . .   | 397        |
| Дополнение: доказательство теоремы Сибуй  |            |
| § 20.10. Нормализация в «узких» секторах . . . . .  | 398        |
| § 20.11. Ключевой пример . . . . .  | 400        |
| § 20.12. Интегральное уравнение и доказательство теоремы 20.23 . . . . .                  | 403        |
| § 20.13. Расширение секторов и доказательство теоремы Сибуй 20.16 . . . . .               | 405        |
| Упражнения и задачи . . . . .   | 405        |
| <b>Приложение А. Элементы многомерного комплексного анализа</b> . . . . .                 | <b>406</b> |
| § А.1. Голоморфные функции нескольких переменных . . . . .                                | 406        |
| § А.2. Теорема об обратной функции . . . . .  | 406        |
| § А.3. Мультииндексные обозначения . . . . .  | 407        |
| § А.4. Интегральная формула Коши . . . . .  | 407        |
| § А.5. Следствия . . . . .  | 407        |
| § А.6. Принцип компактности Вейерштрасса . . . . .  | 408        |
| § А.7. Устранение особенностей ограниченных функций . . . . .                             | 408        |
| § А.8. Устранение компактных особенностей . . . . .                                       | 408        |
| § А.9. Ростки голоморфных функций . . . . .   | 409        |
| § А.10. Мероморфные функции . . . . .   | 409        |
| § А.11. Аналитические множества . . . . .   | 410        |
| § А.12. Голоморфные функции нескольких переменных . . . . .                               | 410        |
| § А.13. Локальная униформизация . . . . .   | 410        |
| § А.14. Аналитичность и алгебраичность . . . . .  | 411        |
| <b>Приложение Б. Элементы теории римановых поверхностей</b> . . . . .                     | <b>412</b> |
| § Б.1. Римановы поверхности и алгебраические кривые . . . . .                             | 412        |
| § Б.2. Род и степень алгебраической кривой . . . . .                                      | 412        |
| § Б.3. Мероморфные функции на римановых поверхностях . . . . .                            | 413        |
| § Б.4. Голоморфные и мероморфные формы на римановых поверхностях . . . . .                | 413        |
| § Б.5. Униформизация . . . . .  | 414        |
| Список обозначений . . . . .  | 415        |
| Предметный указатель . . . . .  | 417        |
| Литература . . . . .  | 422        |