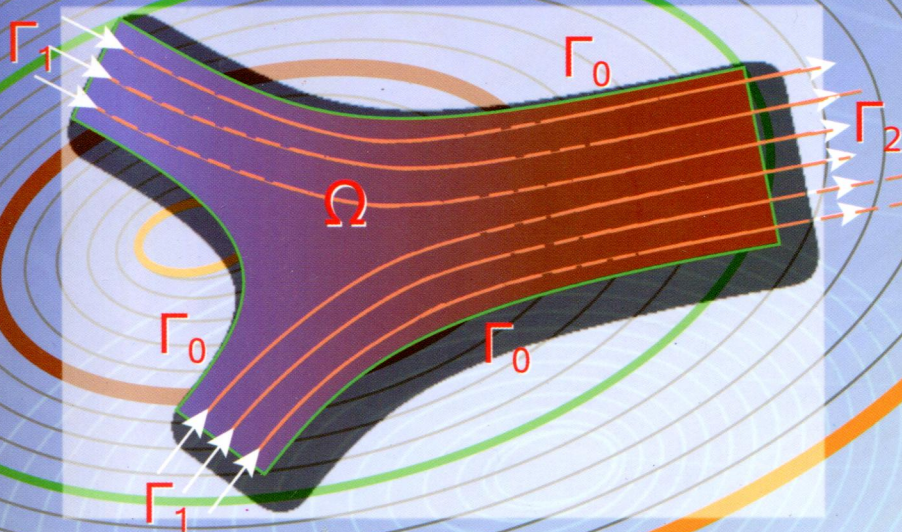


Г.В. Алексеев, Д.А. Терешко

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Институт прикладной математики

Г.В. Алексеев, Д.А. Терешко

**АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ
В ГИДРОДИНАМИКЕ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**



Владивосток
Дальнаука
2008

УДК 517.956
А47

Алексеев Г.В., Терешко Д.А. **Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости.** – Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.

ISBN 978-5-8044-1045-3

Формулируются неоднородные краевые задачи и задачи управления для стационарных моделей гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости и массопереноса. Излагается современный математический аппарат решения указанных задач. Развивается единый метод исследования задач управления для рассматриваемых моделей. Он включает в себя анализ разрешимости исходных краевых задач и задач управления, вывод априорных оценок решений, обоснование применения принципа Лагранжа, анализ системы оптимальности. Указанный метод далее применяется для уравнений Навье–Стокса и для линейной и нелинейной моделей массопереноса. Развиваются эффективные численные алгоритмы решения задач управления и обсуждаются результаты вычислительных экспериментов. Книга рассчитана на специалистов по математическому моделированию, гидродинамике, тепло-массопереносу, студентов, магистрантов и аспирантов физико-математических специальностей.

Ил. 21, библ. 518.

Alekseev G.V., Tereshko D.A. **Analysis and optimization in viscous fluid hydrodynamics.** – Vladivostok: Dalnauka, 2008. 365 p.

ISBN 978-5-8044-1045-3

Nonhomogeneous boundary value problems and control problems for stationary models of viscous hydrodynamics and mass transfer in viscous fluid are formulated. Mathematical methods which are used for study of these problems are described. General method of solving control problems for models under considerations is developed. It contains the solvability analysis of boundary value problems under study, derivation of a priori estimates of solution, justifying Lagrange principle, derivation and analysis of the optimality system. The method is applied for the stationary Navier-Stokes equations and both linear and nonlinear models of mass transfer. The efficient numerical algorithms of solving control problems for the models of mass transfer are proposed and some results of numerical experiments are discussed.

Ill. 21, bibl. 518.

Под редакцией чл.-корр. РАН В.В. Пухначева

Рецензенты:

чл.-корр. РАН В.Н. Дубинин,
д-р физ.-мат. наук Н.Н. Фролов

Утверждено к печати Ученым советом ИПМ ДВО РАН

ISBN 978-5-8044-1045-3

© Г.В. Алексеев, Д.А. Терешко, 2008
© Дальнаука, 2008

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Функциональные пространства вектор-функций	15
1.1. Пространства скалярных обобщенных функций и пространства Соболева	15
1.1.1. Пространство обобщенных функций	19
1.1.2. Пространства Соболева	23
1.2. Пространство векторных обобщенных функций и формулы Грина	38
1.2.1. Основные дифференциальные операторы в пространстве векторных обобщенных функций	38
1.2.2. Формулы Грина	42
1.2.3. Пространство $\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega)$ и оператор нормального следа	48
1.2.4. Пространство $\mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega)$ и оператор тангенциального следа	55
1.2.5. Скалярные и векторные потенциалы	64
1.3. Функциональные пространства для стационарной задачи Стокса	71
Глава 2. Стационарные модели динамики вязкой несжимаемой жидкости	79
2.1. Обзор моделей Навье–Стокса и Стокса	79
2.2. Задача Дирихле для обобщенной модели Стокса	90
2.2.1. Определение и единственность слабого решения	90
2.2.2. Существование и регулярность слабого решения	92
2.3. Краевая задача для модельной системы Стокса	97
2.3.1. Элементы теории сингулярных решений для оператора Лапласа	98
2.3.2. Некоторые свойства пространств \mathbf{X}_N и \mathbf{H}_N	100
2.3.3. Первый подход к определению слабого решения	101
2.3.4. Второй подход к определению слабого решения	106
2.4. Краевые задачи для уравнений Максвелла	108
2.5. Смешанная краевая задача для системы Стокса	116

2.5.1.	Основные функциональные пространства	116
2.5.2.	Определение и существование слабого решения	120
Глава 3. Экстремальные задачи для линейной модели переноса вещества		126
3.1.	Постановка исходной краевой задачи. Основные пространства	126
3.2.	Разрешимость краевой задачи	129
3.3.	Постановка и исследование экстремальных задач	134
3.4.	Необходимые условия экстремума. Обоснование системы оптимальности	141
3.4.1.	Вывод системы оптимальности	141
3.4.2.	Регулярность множителя Лагранжа	148
3.5.	Анализ единственности и устойчивости решений экстремальных задач	152
3.5.1.	Единственность решения обратной задачи восстановления плотностей источников	152
3.5.2.	Единственность решения обратной задачи восстановления неизвестного коэффициента граничного условия	156
3.5.3.	Многопараметрическая обратная экстремальная задача	162
3.6.	Анализ результатов численных экспериментов	168
3.6.1.	Численный анализ линейной системы оптимальности	170
3.6.2.	Численный анализ нелинейной системы оптимальности	175
3.7.	Задачи и упражнения	179
Глава 4. Экстремальные задачи для модели Навье–Стокса		181
4.1.	Постановка исходной краевой задачи. Основные пространства	182
4.2.	Исследование краевой задачи	185
4.2.1.	Определение слабого решения задачи 4	185
4.2.2.	Случай однородного условия Дирихле для скорости .	186
4.2.3.	Случай неоднородного условия Дирихле для скорости	187
4.2.4.	Единственность решения задачи 4	189
4.2.5.	Линейная модель Стокса–Озеена	190
4.3.	Постановка и разрешимость экстремальных задач	194
4.4.	Вывод и анализ системы оптимальности	198
4.4.1.	Существование множителей Лагранжа	198
4.4.2.	Вывод дифференциальных уравнений и краевых условий для множителей Лагранжа	202
4.5.	Единственность решений экстремальных задач	206
4.5.1.	Регулярность множителя Лагранжа	206
4.5.2.	Общее свойство решений системы оптимальности . .	208
4.5.3.	Единственность решений экстремальных задач для конкретных функционалов качества	210

4.6.	Смешанные краевые задачи	215
4.6.1.	Постановка краевой задачи. Основные пространства	215
4.6.2.	Глобальная разрешимость краевой задачи	218
4.7.	Задачи и упражнения	222
Глава 5.	Экстремальные задачи для нелинейной модели пе-	
	реноса вещества	224
5.1.	Постановки исходной краевой задачи. Основные пространства	224
5.2.	Разрешимость задачи 5	228
5.2.1.	Определение слабого решения задачи 5	228
5.2.2.	Разрешимость краевой задачи	230
5.2.3.	Единственность решения задачи 5	234
5.2.4.	Случай линейной модели распространения вещества	235
5.3.	Постановка и разрешимость экстремальных задач	239
5.4.	Вывод и анализ системы оптимальности	243
5.4.1.	Существование множителей Лагранжа	243
5.4.2.	Вывод дифференциальных уравнений и граничных усло-	
	вий для множителей Лагранжа	246
5.4.3.	Система оптимальности в случае линейной задачи	251
5.5.	Анализ единственности и устойчивости решений экстремаль-	
	ных задач	251
5.5.1.	Регулярность множителя Лагранжа	252
5.5.2.	Общее свойство системы оптимальности	254
5.5.3.	Локальная единственность решений экстремальных за-	
	дач определения плотностей источников	257
5.5.4.	Единственность решения обратной экстремальной за-	
	дачи восстановления коэффициента граничного условия	262
5.6.	Анализ результатов численных расчетов	273
5.6.1.	Минимизация нормы завихренности потока	275
5.6.2.	Приближение течения к заданному потоку	277
5.7.	Задачи и упражнения	278
Литература		280
Приложения		304
Приложение 1.	Функциональные пространства	304
Приложение 2.	Дополнительные свойства пространств Соболева	318
Приложение 3.	Элементы теории слабых решений краевых задач	
	для оператора Лапласа	323
Приложение 4.	Принцип Лагранжа в гладко-выпуклых экстре-	
	мальных задачах	337
Приложение 5.	Доказательства основных теорем	341