



Х. Иванец, Э. Ковальский

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Х. Иванец, Э. Ковальский

# Аналитическая теория чисел

*Перевод с английского С. М. Львовского  
Под редакцией А. В. Устинова*

Москва  
Издательство МЦНМО  
2014

УДК 511.33  
ББК 22.13  
И18

**Иванец Х., Ковальский Э.**  
И18 Аналитическая теория чисел / Пер. с англ. С. М. Львовского под ред. А. В. Устинова. — М.: МЦНМО, 2014. — 712 с.  
ISBN 978-5-4439-0234-0

Книга представляет собой подробную современную монографию по аналитической теории чисел. Начиная изложение с классических методов и результатов, авторы доходят до переднего края современных исследований. Классические результаты приведены с полными доказательствами, ряд результатов более современных формулируется и подробно обсуждается.

Рассматриваются, в частности, такие темы, как  $L$ -функции, методы решета, различные виды тригонометрических сумм, модулярные формы.

Глава 5 книги представляет собой систематическое изложение важного материала, ранее разбросанного по журнальным статьям.

Специальных предварительных знаний от читателей не требуется. Для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников.

ББК 22.13

This work was originally published in English by the American Mathematical Society under the title *Analytic Number Theory* by Henryk Iwaniec and Emmanuel Kowalski.

© American Mathematical Society, 2004. The present translation was created for the Moscow Mathematical for Continuous Mathematical Education under authority of American Mathematical Society and is published by permission.

Подписано к печати 04.08.2014 г. Формат 70 × 100/16. Печать офсетная.  
Объем 44,5 печ. л. Тираж 1000 экз. Заказ № 1445.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел.: (499) 241-74-83.

Отпечатано с электронных носителей издательства.  
ОАО "Тверской полиграфический комбинат". 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.  
Телефон: (4822) 44-52-03, 44-50-34, Телефон/факс: (4822)44-42-15  
Home page - [www.tverpk.ru](http://www.tverpk.ru) Электронная почта (E-mail) - [sales@tverpk.ru](mailto:sales@tverpk.ru)

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: [biblio@mcsme.ru](mailto:biblio@mcsme.ru)

---

ISBN 978-0-8218-3633-0 (англ.) © American Mathematical Society, 2004.  
ISBN 978-5-4439-0234-0 (русск.) © МЦНМО, перевод на русский язык, 2014.

# Оглавление

Предисловие

Введение

Глава 1. Арифметические функции

§ 1.1. Обозначения и определения . . . . .	20
§ 1.2. Производящие ряды . . . . .	21
§ 1.3. Свертка Дирихле . . . . .	23
§ 1.4. Примеры . . . . .	25
§ 1.5. Усреднение арифметических функций . . . . .	31
§ 1.6. Суммы мультипликативных функций . . . . .	35
§ 1.7. Распределение аддитивных функций . . . . .	42

Глава 2. Элементарная теория простых чисел

§ 2.1. Теорема о простых числах . . . . .	45
§ 2.2. Метод Чебышёва . . . . .	46
§ 2.3. Простые числа в арифметических прогрессиях . . . . .	48
§ 2.4. Об элементарных доказательствах теоремы о простых числах . . . . .	53

Глава 3. Характеры

§ 3.1. Введение . . . . .	58
§ 3.2. Характеры Дирихле . . . . .	59
§ 3.3. Примитивные характеры . . . . .	61
§ 3.4. Гауссовы суммы . . . . .	62
§ 3.5. Вещественные характеры . . . . .	65
§ 3.6. Символ биквадратичного вычета . . . . .	69
§ 3.7. Символы Якоби—Дирихле и Якоби—Куботы . . . . .	71
§ 3.8. Характеры Гекке . . . . .	73

Глава 4. Формулы суммирования

§ 4.1. Введение . . . . .	82
§ 4.2. Формула Эйлера—Маклорена . . . . .	83
§ 4.3. Формула суммирования Пуассона . . . . .	86
§ 4.4. Формулы суммирования для шара . . . . .	88
§ 4.5. Формулы суммирования для гиперболы . . . . .	91
§ 4.6. Функциональные уравнения для $L$ -функций Дирихле . . . . .	103
4А. Приложение. Интегралы и ряды Фурье . . . . .	106

Глава 5. Классическая аналитическая теория  $L$ -функций

§ 5.1. Определения и предварительные сведения . . . . .	113
§ 5.2. Аппроксимация $L$ -функций . . . . .	118

§ 5.3. Подсчет числа нулей $L$ -функций . . . . .	122
§ 5.4. Область, свободная от нулей . . . . .	126
§ 5.5. Явная формула . . . . .	130
§ 5.6. Теорема о простых числах . . . . .	132
§ 5.7. Расширенная гипотеза Римана . . . . .	136
§ 5.8. Простые следствия из GRH . . . . .	140
§ 5.9. Дзета-функция Римана и $L$ -функции Дирихле . . . . .	143
§ 5.10. $L$ -функции числовых полей . . . . .	151
§ 5.11. Классические автоморфные $L$ -функции . . . . .	157
§ 5.12. Общие автоморфные $L$ -функции . . . . .	162
§ 5.13. $L$ -функции Артина . . . . .	169
§ 5.14. $L$ -функции многообразий . . . . .	174
5A. Приложение: комплексный анализ . . . . .	179
Глава 6. Элементарные методы решета	
§ 6.1. Задачи о решете . . . . .	184
§ 6.2. Схема включений и исключений . . . . .	186
§ 6.3. Оценки на $V^+(z)$ и $V^-(z)$ . . . . .	189
§ 6.4. Основная лемма теории решета . . . . .	191
§ 6.5. $\Lambda^2$ -решето . . . . .	192
§ 6.6. Оценка главного члена для $\Lambda^2$ -решета . . . . .	197
§ 6.7. Оценки остаточного члена в $\Lambda^2$ -решете . . . . .	198
§ 6.8. Некоторые приложения $\Lambda^2$ -решета . . . . .	199
Глава 7. Билинейные формы и большое решето	
§ 7.1. Общие принципы оценки двойных сумм . . . . .	201
§ 7.2. Билинейные формы с экспонентами . . . . .	204
§ 7.3. Введение в большое решето . . . . .	206
§ 7.4. Аддитивные неравенства большого решета . . . . .	208
§ 7.5. Мультипликативное неравенство большого решета . . . . .	212
§ 7.6. Приложения большого решета к задачам просеивания . . . . .	214
§ 7.7. Обзор неравенств типа большого решета . . . . .	218
§ 7.8. Неравенства большого решета для параболических форм . . . . .	221
§ 7.9. Ортогональность эллиптических кривых . . . . .	227
§ 7.10. Степенные моменты $L$ -функций . . . . .	230
Глава 8. Тригонометрические суммы	
§ 8.1. Введение . . . . .	232
§ 8.2. Метод Германа Вейля . . . . .	233
§ 8.3. Метод ван дер Корпута . . . . .	240
§ 8.4. Обсуждение экспоненциальных пар . . . . .	250
§ 8.5. Метод Виноградова . . . . .	254
Глава 9. Многочлены Дирихле	

§ 9.1. Введение . . . . .	267
§ 9.2. Интегральные оценки в среднем . . . . .	268
§ 9.3. Дискретные оценки в среднем . . . . .	271
§ 9.4. Большие значения многочленов Дирихле . . . . .	274
§ 9.5. Многочлены Дирихле с характеристиками . . . . .	277
§ 9.6. Метод симметрии . . . . .	283
§ 9.7. Большие значения $D(s, \chi)$ . . . . .	287
Глава 10. Оценки плотности нулей	
§ 10.1. Введение . . . . .	289
§ 10.2. Многочлены, выявляющие нули . . . . .	290
§ 10.3. К гипотезе о плотности нулей . . . . .	294
§ 10.4. Большая плотностная теорема . . . . .	297
§ 10.5. Промежутки между простыми числами . . . . .	307
Глава 11. Суммы над конечными полями	
§ 11.1. Введение . . . . .	311
§ 11.2. Конечные поля . . . . .	311
§ 11.3. Тригонометрические суммы . . . . .	315
§ 11.4. Соотношение Хассе—Дэвенпорта . . . . .	317
§ 11.5. Дзета-функция для сумм Кластермана . . . . .	321
§ 11.6. Метод Степанова для гиперэллиптических кривых . . . . .	324
§ 11.7. Доказательство оценки А. Вейля для сумм Кластермана . . . . .	331
§ 11.8. Гипотеза Римана для эллиптических кривых над конечными полями	334
§ 11.9. Геометрия эллиптических кривых . . . . .	336
§ 11.10. Локальная дзета-функция эллиптической кривой . . . . .	344
§ 11.11. Обзор дальнейших результатов: первое знакомство с когомо- логиями . . . . .	347
§ 11.12. Комментарии . . . . .	364
Глава 12. Суммы характеров	
§ 12.1. Введение . . . . .	368
§ 12.2. Методы пополнения . . . . .	369
§ 12.3. Полные суммы характеров . . . . .	370
§ 12.4. Короткие суммы характеров . . . . .	375
§ 12.5. Очень короткие суммы характеров по сильно составному модулю .	382
§ 12.6. Характеры по мощному модулю . . . . .	387
Глава 13. Суммы по простым числам	
§ 13.1. Общие принципы . . . . .	390
§ 13.2. Вариант метода Виноградова . . . . .	394
§ 13.3. Тожество Линника . . . . .	396
§ 13.4. Тожество Вона . . . . .	398
§ 13.5. Тригонометрические суммы по простым числам . . . . .	399

§ 13.6. Снова решето . . . . .	403
Глава 14. Голоморфные модулярные формы	
§ 14.1. Факторы верхней полуплоскости и модулярные формы . . . . .	407
§ 14.2. Ряды Эйзенштейна и Пуанкаре . . . . .	412
§ 14.3. Тэта-функции . . . . .	416
§ 14.4. Модулярные формы, соответствующие эллиптическим кривым . . . . .	419
§ 14.5. $L$ -функции Гекке . . . . .	425
§ 14.6. Операторы Гекке и автоморфные $L$ -функции . . . . .	427
§ 14.7. Примитивные формы и специальный базис . . . . .	430
§ 14.8. Подкрутки модулярных форм . . . . .	435
§ 14.9. Оценки для коэффициентов Фурье параболических форм . . . . .	437
§ 14.10. Средние коэффициентов Фурье . . . . .	440
Глава 15. Спектральная теория автоморфных форм	
§ 15.1. Мотивировки; предварительные сведения из геометрии . . . . .	443
§ 15.2. Лапласиан на $\mathbb{H}$ . . . . .	446
§ 15.3. Автоморфные функции и формы . . . . .	447
§ 15.4. Непрерывный спектр . . . . .	449
§ 15.5. Дискретный спектр . . . . .	451
§ 15.6. Спектральное разложение и автоморфные ядра . . . . .	453
§ 15.7. Формула следа Сельберга . . . . .	456
§ 15.8. Задачи о точках гиперболических решеток . . . . .	462
§ 15.9. Распределение длин замкнутых геодезических и число классов . . . . .	465
Глава 16. Суммы сумм Клостермана	
§ 16.1. Введение . . . . .	469
§ 16.2. Разложения Фурье для рядов Пуанкаре . . . . .	470
§ 16.3. Проекция рядов Пуанкаре на формы Маасса . . . . .	472
§ 16.4. Формулы Кузнецова . . . . .	473
§ 16.5. Оценки коэффициентов Фурье . . . . .	480
§ 16.6. Оценки суммы сумм Клостермана . . . . .	483
Глава 17. Простые числа в арифметических прогрессиях	
§ 17.1. Введение . . . . .	487
§ 17.2. Билинейные формы в арифметических прогрессиях . . . . .	489
§ 17.3. Доказательство теоремы Бомбьери—Виноградова . . . . .	491
§ 17.4. Доказательство теоремы Барбана—Дэвенпорта—Халберстама . . . . .	493
Глава 18. Наименьшее простое число в арифметической прогрессии	
§ 18.1. Введение . . . . .	495
§ 18.2. Плотностная оценка без логарифмов . . . . .	497
§ 18.3. Отталкивание от исключительного нуля . . . . .	503
§ 18.4. Доказательство теоремы Линника . . . . .	509

Глава 19. Проблема Гольдбаха	
§ 19.1. Введение	513
§ 19.2. Неполные $L$ -функции	515
§ 19.3. Тернарная аддитивная проблема с $\Lambda^b$	516
§ 19.4. Доказательство теоремы Виноградова о трех простых числах	517
Глава 20. Круговой метод	
§ 20.1. Число разбиений	519
§ 20.2. Диофантовы уравнения	527
§ 20.3. Круговой метод по Клостерману	539
§ 20.4. Представления квадратичными формами	545
§ 20.5. Еще одно разложение дельта-символа	555
Глава 21. Равнораспределенность	
§ 21.1. Критерий Германа Вейля	562
§ 21.2. Некоторые результаты о равнораспределенности	563
§ 21.3. Корни квадратных сравнений	571
§ 21.4. Линейные и билинейные формы от квадратных корней	573
§ 21.5. Один ряд Пуанкаре для квадратных корней	575
§ 21.6. Оценка ряда Пуанкаре	578
Глава 22. Мнимые квадратичные поля	
§ 22.1. Бинарные квадратичные формы	581
§ 22.2. Группа классов	587
§ 22.3. $L$ -функции, связанные с группой классов	590
§ 22.4. Задачи о числе классов	598
§ 22.5. Распадение простых чисел в $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$	602
§ 22.6. Оценки для производных $L^{(k)}(1, \chi_D)$	605
Глава 23. Эффективные оценки на число классов	
§ 23.1. Автоморфные $L$ -функции: подход Ландау	611
§ 23.2. Представление числа $\Lambda^{(g)}(1/2)$ в виде суммы	613
§ 23.3. Оценки сумм $S_2$ и $S_3$	615
§ 23.4. Оценка суммы $S_1$	616
§ 23.5. Асимптотическая формула для $\Lambda^{(g)}(1/2)$	619
§ 23.6. Нижняя оценка для числа классов	621
§ 23.7. Заключительные замечания	624
23А. Приложение: нуль $L$ -функции Гросса—Загира имеет порядок $\geq 3$	625
Глава 24. Критические нули дзета-функции Римана	
§ 24.1. Нижняя оценка для $N_0(T)$	632
§ 24.2. Положительная доля критических нулей	636
Глава 25. Расстояния между нулями дзета-функции Римана	
§ 25.1. Введение	651
§ 25.2. Корреляция пар нулей	652



---

§ 25.3. $n$ -корреляционная функция для последовательных промежутков . . .	658
§ 25.4. Нули $L$ -функций с малой ординатой . . . . .	661
Глава 26. Центральные значения $L$ -функций	
§ 26.1. Введение . . . . .	666
§ 26.2. Идея доказательства теоремы 26.2 . . . . .	670
§ 26.3. Формулы для первого и второго моментов . . . . .	672
§ 26.4. Оптимизация успокаивающей функции . . . . .	681
§ 26.5. Доказательство теоремы 26.2 . . . . .	686
Литература	
Предметный указатель	