

Ю.Н. Работнов

---

Ползучесть  
элементов  
конструкций

---





РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОТДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИКИ, МАШИНОСТРОЕНИЯ,  
МЕХАНИКИ И ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Ю.Н. Работнов

# Ползучесть элементов конструкций

*Второе издание, стереотипное*



МОСКВА НАУКА 2014

УДК 531/534

ББК 22.2

Р13

**Работнов Ю.Н.**

Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов ; Отд. энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН. – 2-е изд., стереотипное. – М. : Наука. 2014. – 752 с. – ISBN 978-5-02-038473-6 (в пер.).

Книга выходит к 100-летию выдающегося ученого-механика Ю.Н. Работнова, внесшего принципиальный вклад в развитие теории пластичности, теории оболочек и устойчивости упруго-вязкопластических систем. Ему принадлежат фундаментальные результаты в механике разрушения, механике поврежденности, механике композитных материалов, он был инициатором разработок новых методов и стандартов расчетов конструкций и деталей машин на прочность. Настоящая монография занимает главное место в ряду многих книг ученого.

Для ученых-механиков, специалистов по прочности.

Научное издание

**Юрий Николаевич Работнов**

**ПОЛЗУЧЕСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ**

**2-е издание, стереотипное**

*Утверждено к печати Отделением энергетики,  
машиностроения, механики и процессов управления  
Российской академии наук*

Художник Ю.И. Духовская. Художественный редактор В.Ю. Яковлев

Подписано к печати 15.01.2014. Формат 60 × 90 1/16. Гарнитура Обыкновенная новая  
Печать офсетная. Усл.печл. 47,0. Уч.-изд.л. 44,6. Тип. зак. 3015.

Издательство “Наука” 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: [secret@naukaran.ru](mailto:secret@naukaran.ru) [www.naukaran.ru](http://www.naukaran.ru)

Первая Академическая типография “Наука”  
199034, Санкт-Петербург, 9-я линия, 12/28

ISBN 978-5-02-038473-6

© Работнов Ю.Н., 1966

© Российская академия наук, 2014

© Редакционно-издательское оформление.

Издательство “Наука”, 2014

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

Предисловие . . . . .	9
Введение . . . . .	11
Глава I	
Основные понятия механики твердого тела . . . . .	16
§ 1. Тензоры в трехмерном евклидовом пространстве . . . . .	17
§ 2. Свертывание тензоров. Инварианты . . . . .	22
§ 3. Взаимный базис. Ковариантные и контравариантные составляющие тензора . . . . .	25
§ 4. Дифференциальные операции . . . . .	30
§ 5. Теория деформаций в сплошной среде . . . . .	36
§ 6. Теория напряжений . . . . .	38
§ 7. Декартовы координаты. Определение перемещений . . . . .	41
§ 8. Некоторые дальнейшие свойства тензора напряжений . . . . .	44
§ 9. Тензор скоростей деформации. Инварианты тензоров деформаций и скоростей деформации . . . . .	50
§ 10. Упругое тело . . . . .	54
§ 11. Изотропное упругое тело . . . . .	58
Глава II	
Теория пластичности . . . . .	62
§ 12. Деформационная теория пластичности . . . . .	63
§ 13. Деформационная теория при пропорциональном нагружении . . . . .	68
§ 14. Постулат упрочнения Друкера . . . . .	70
§ 15. О возможных границах применимости деформационной теории пластичности . . . . .	73
§ 16. Двумерная модель упрочняющегося тела . . . . .	78
§ 17. Теория течения при гладкой поверхности нагружения. Изотропное упрочнение . . . . .	86
§ 18. Теория течения с трансляционным упрочнением . . . . .	89
§ 19. Сингулярные поверхности нагружения . . . . .	91
§ 20. Теория скольжения . . . . .	96
§ 21. Модель плоского тела . . . . .	101
§ 22. Течение с сингулярной поверхностью нагружения . . . . .	105
Глава III	
Линейные вязко-упругие среды . . . . .	108
§ 23. Простейшие вязко-упругие тела . . . . .	109
§ 24. Дифференциальные законы деформирования более общего вида . . . . .	114
§ 25. Наследственно-упругое тело . . . . .	119

§ 26. Условие замкнутого цикла Вольтерра . . . . .	122
§ 27. Сингулярные ядра наследственности . . . . .	124
§ 28. Экспоненциальные операторы произвольного порядка . . . . .	126
§ 29. Теорема умложения для $\mathcal{E}_\alpha$ -операторов . . . . .	129
§ 30. Асимптотические формулы для $\mathcal{E}$ -функций . . . . .	132
§ 31. Общая задача теории наследственной упругости. Принцип Вольтерра . . . . .	134
§ 32. Применение трансформации Лапласа к задачам теории наследственной упругости . . . . .	137
§ 33. Ядра более общего вида . . . . .	140
§ 34. Линейная ползучесть бетона . . . . .	144
§ 35. Дальнейшие приложения принципа Вольтерра . . . . .	147
§ 36. Простейшие динамические задачи . . . . .	149
§ 37. Комплексные модули . . . . .	151
§ 38. Функции ползучести и релаксации . . . . .	153
§ 39. Задачи о подвижной нагрузке. Малые скорости . . . . .	156
§ 40. Движение штампа по границе вязко-упругой среды . . . . .	159
§ 41. Некоторые экспериментальные данные по ползучести пластмасс . . . . .	162

## Глава IV

## Ползучесть металлов. Основные опытные факты и феноменологические теории . . . . .

§ 42. Основные сведения о ползучести . . . . .	166
§ 43. Эмпирические формулы для кривых ползучести . . . . .	169
§ 44. Подобие кривых ползучести . . . . .	172
§ 45. Температурные зависимости . . . . .	177
§ 46. Релаксация напряжений . . . . .	183
§ 47. Простейшие теории ползучести . . . . .	185
§ 48. Теории старения . . . . .	190
§ 49. Гипотеза уравнения состояния . . . . .	196
§ 50. Аналитические выражения для закона упрочнения . . . . .	200
§ 51. Связь ползучести и релаксации по теории упрочнения . . . . .	205
§ 52. Наследственная теория ползучести . . . . .	209
§ 53. Экспериментальная проверка гипотезы упрочнения при переменных нагрузках . . . . .	213
§ 54. Другие исследования ползучести при переменных нагрузках на основе гипотезы упрочнения . . . . .	218
§ 55. Кинетические уравнения ползучести . . . . .	223
§ 56. Разупрочнение при ползучести . . . . .	229
§ 57. Ползучесть и мгновенная пластическая деформация . . . . .	233
§ 58. Кратковременная ползучесть. Основные факты . . . . .	238
§ 59. Кратковременная ползучесть. Зависимость для скорости . . . . .	243
§ 60. Ползучесть при сжатии. Реверсирование нагрузки . . . . .	246
§ 61. Малые отклонения от основного состояния . . . . .	249
§ 62. Динамическая ползучесть . . . . .	252

## Глава V

## Ползучесть при сложном напряженном состоянии . . . . .

§ 63. Установившаяся ползучесть . . . . .	256
§ 64. Изотропная ползучесть . . . . .	258
§ 65. Потенциал ползучести . . . . .	261
§ 66. Специальные формы закона ползучести . . . . .	266
§ 67. Обработка опытов на растяжение с кручением . . . . .	271
§ 68. Квазилинейные уравнения установившейся ползучести . . . . .	274
§ 69. Анизотропная ползучесть . . . . .	281
§ 70. Определение параметров анизотропии . . . . .	286

## ОГЛАВЛЕНИЕ

5

§ 71. Неустановившаяся ползучесть . . . . .	288
72. Теории ползучести деформационного типа . . . . .	291
73. Теория течения . . . . .	295
74. Обобщение теории упрочнения . . . . .	298
75. Квазиустановившаяся ползучесть . . . . .	299
§ 76. Экспериментальная проверка теорий ползучести при сложном напряженном состоянии. Ранние работы . . . . .	303
§ 77. Ползучесть при сложном напряженном состоянии и постоянных нагрузках. Опыты Джонсона . . . . .	306
§ 78. Дальнейший анализ опытов Джонсона . . . . .	314
§ 79. Экспериментальные исследования ползучести при сложном напряженном состоянии (продолжение) . . . . .	325
§ 80. Исследования Наместникова . . . . .	331
§ 81. Ползучесть при сложном напряженном состоянии и переменных нагрузках . . . . .	334
§ 82. Релаксация напряжений в сложном напряженном состоянии . . . . .	339
<b>Глава VI</b>	
<b>Длительное разрушение при высоких температурах . . . . .</b>	<b>344</b>
§ 83. Основные сведения о длительной прочности . . . . .	344
84. Температурно-временные зависимости длительной прочности . . . . .	347
85. Вязкое разрушение . . . . .	351
86. Разрушение, сопровождающееся охрупчиванием . . . . .	357
87. Смешанное разрушение. Гипотеза Качанова . . . . .	360
88. Более общая гипотеза разрушения. Хрупкий случай . . . . .	363
89. Смешанное разрушение. Кратковременная ползучесть . . . . .	366
90. Разрушение при циклических нагрузках . . . . .	370
91. Опытное исследование длительной прочности при сложном напряженном состоянии . . . . .	372
92. Простейшие критерии длительной прочности . . . . .	376
§ 93. Общие представления о длительном разрушении при сложном напряженном состоянии . . . . .	379
§ 94. О возможности построения более общей теории длительного разрушения . . . . .	383
<b>Глава VII</b>	
<b>Установившаяся ползучесть. Общая теория и простейшие задачи . . . . .</b>	<b>386</b>
§ 95. Единственность в малом и устойчивость . . . . .	386
§ 96. Вариационный принцип Лагранжа . . . . .	390
97. Вариационный принцип Кастильяно . . . . .	392
§ 98. Некоторые следствия вариационных принципов . . . . .	393
99. Частные формы уравнений установившейся ползучести . . . . .	396
§ 100. Моделирование установившейся и квазиустановившейся ползучести . . . . .	399
§ 101. Степенной закон ползучести. Теорема Келледайна и Друкера . . . . .	401
102. Установившаяся ползучесть ферм . . . . .	405
§ 103. Применение поверхностей постоянной мощности диссипации к расчету ферм . . . . .	412
§ 104. Кинематический способ расчета ферм. Примеры . . . . .	416
§ 105. Способ Качанова . . . . .	421
<b>Глава VIII</b>	
<b>Установившаяся ползучесть. Изгиб и кручение . . . . .</b>	<b>423</b>
§ 106. Установившаяся ползучесть при чистом изгибе . . . . .	423
§ 107. Общий случай чистого изгиба . . . . .	429

§ 108. Тонкостенные стержни открытого профиля . . . . .	432
§ 109. Приближенный способ исследования изгиба тонкостенных стержней . . . . .	437
§ 110. Деформация балок и рам при изгибе . . . . .	441
§ 111. Ползучесть при кручении . . . . .	447
§ 112. Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля . . . . .	450
§ 113. Кручение тонкостенных стержней открытого профиля . . . . .	454
§ 114. Вариационные методы решения задач о кручении . . . . .	456
§ 115. Изгиб и кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля . . . . .	458
§ 116. Изгиб стержней при наличии продольной силы . . . . .	461
§ 117. Стержень идеального двутаврового сечения . . . . .	464
§ 118. Простейшие задачи продольно-поперечного изгиба . . . . .	466

**Г л а в а IX**

<b>Плоские осесимметричные задачи теории установившейся ползучести</b> . . . . .	471
§ 119. Основные уравнения плоской задачи . . . . .	471
§ 120. Толстостенные трубы . . . . .	475
§ 121. Чистый изгиб части кругового цилиндра . . . . .	479
§ 122. Вращающиеся диски . . . . .	486
§ 123. Ползучесть сплошного диска постоянной толщины . . . . .	488
§ 124. Ползучесть диска с центральным отверстием . . . . .	492
§ 125. Прямое численное интегрирование уравнений ползучести вращающегося диска . . . . .	494
§ 126. Диск равного сопротивления . . . . .	496
§ 127. Расчет дисков по методу последовательных приближений . . . . .	500
§ 128. Другой вариант метода последовательных приближений . . . . .	506
§ 129. Концентрация напряжений около отверстия в равномерно растягиваемой пластинке . . . . .	509
§ 130. Диск гиперболического профиля, нагруженный радиальными силами . . . . .	515

**Г л а в а X**

<b>Установившаяся ползучесть пластин и оболочек</b> . . . . .	517
§ 131. Изгиб пластин. Основные уравнения линейной теории . . . . .	517
§ 132. Потенциал усилий и моментов. Основные уравнения ползучести пластин . . . . .	521
§ 133. Частично линеаризованные уравнения ползучести пластин . . . . .	523
§ 134. Ползучесть пластинок при изгибе . . . . .	526
§ 135. Ползучесть круглых пластин по теории типа Мизеса . . . . .	530
§ 136. Применение вариационных методов к расчету пластин . . . . .	536
§ 137. Расчет пластин на ползучесть при критерии Треска . . . . .	537
§ 138. Более сложные виды нагрузки . . . . .	542
§ 139. Изгиб пластинами распределенной нагрузкой . . . . .	544
§ 140. Некруглые пластины . . . . .	547
§ 141. Ползучесть оболочек . . . . .	549
§ 142. Безмоментная теория оболочек . . . . .	551
§ 143. Безмоментная теория оболочек — определение деформаций и перемещений . . . . .	555
§ 144. Безмоментные оболочки вращения . . . . .	558
§ 145. Многослойные оболочки с жестко связанными слоями . . . . .	560
§ 146. Двухслойная модель оболочки . . . . .	563
§ 147. Уравнения теории оболочек . . . . .	568
§ 148. Техническая теория оболочек . . . . .	571
§ 149. Техническая теория ползучести двухслойных оболочек . . . . .	577

## ОГЛАВЛЕНИЕ

7

<b>§ 150. Уравнения осесимметричной ползучести круговой цилиндрической оболочки . . . . .</b>	581
<b>§ 151. Степенной закон ползучести. Приближенное исследование краевого эффекта . . . . .</b>	585
<b>§ 152. Полубесконечная оболочка с шарнирно закрепленным краем . . . . .</b>	589
<b>§ 153. Полубесконечная оболочка с защемленным краем . . . . .</b>	592
<b>§ 154. Распространение технической теории на случай <math>T_{11} \neq 0</math> . . . . .</b>	595
<b>§ 155. Цилиндрическая оболочка, скатая осевой силой . . . . .</b>	597
<b>§ 156. Краевой эффект в цилиндрической оболочке, нагруженной распределенным давлением и осевой силой . . . . .</b>	598
<b>§ 157. Приближенные выражения потенциала скоростей для произвольной оболочки . . . . .</b>	601
 <b>Глава XI</b>	
<b>Неустановившаяся ползучесть . . . . .</b>	602
<b>§ 158. Применение гипотезы упрочнения к расчетам на неустановившуюся ползучесть . . . . .</b>	602
<b>§ 159. Неустановившаяся ползучесть при изгибе . . . . .</b>	605
<b>§ 160. Численное решение задачи о неустановившейся ползучести стержня . . . . .</b>	608
<b>§ 161. Неустановившаяся ползучесть дисков . . . . .</b>	613
<b>§ 162. Неустановившаяся ползучесть дисков. Случаи 2, 3, 4 . . . . .</b>	618
<b>§ 163. Ползучесть вращающегося цилиндра и трубы . . . . .</b>	621
<b>§ 164. Вариационный принцип Качанова в теории неустановившейся ползучести . . . . .</b>	626
<b>§ 165. Вариационный принцип Уанга и Прагера . . . . .</b>	629
<b>§ 166. Приближенное решение релаксационных задач. Метод Шестстрикова . . . . .</b>	632
<b>§ 167. Смешанный вариационный принцип . . . . .</b>	634
<b>§ 168. Применение смешанного вариационного принципа к задаче изгиба . . . . .</b>	637
<b>§ 169. Изгиб стержня при ползучести с упрочнением . . . . .</b>	640
<b>§ 170. Неустановившаяся ползучесть пластин . . . . .</b>	643
<b>§ 171. Общий прием исследования неустановившейся ползучести на основе теории упрочнения . . . . .</b>	645
<b>§ 172. Применение теории старения к расчетам на неустановившуюся ползучесть . . . . .</b>	648
<b>§ 173. Определение времени до разрушения . . . . .</b>	651
<b>§ 174. Уточнение определение времени хрупкого разрушения вращающегося диска . . . . .</b>	654
 <b>Глава XII</b>	
<b>Геометрически-нелинейные задачи теории ползучести. Критическое время . . . . .</b>	660
<b>§ 175. Простейшие геометрически-нелинейные задачи ползучести . . . . .</b>	660
<b>§ 176. Гибкая нить . . . . .</b>	662
<b>§ 177. Изгиб балки с шарнирно закрепленными концами . . . . .</b>	665
<b>§ 178. Критическое время сжатого стержня . . . . .</b>	670
<b>§ 179. Учет мгновенной пластической деформации при определении критического времени . . . . .</b>	677
<b>§ 180. Критическое время сжатого стержня. Некоторые дальнейшие результаты . . . . .</b>	681
<b>§ 181. Смешанный вариационный принцип в применении к задачам выпучивания . . . . .</b>	687

§ 182. Выпучивание сжатого стержня. Применение вариационного метода . . . . .	689
§ 183. Устойчивость арки . . . . .	693
§ 184. Некоторые исследования устойчивости оболочек при ползучести . . . . .	698
§ 185. Осесимметричное выпучивание коротких цилиндрических оболочек . . . . .	701
§ 186. Приближенный метод решения задач выпучивания в нелинейной постановке . . . . .	704
§ 187. Устойчивость сжатого вязко-упругого стержня . . . . .	708
§ 188. Устойчивость сжатого стержня, материал которого следует закону упрочнения . . . . .	713
§ 189. Условные линеаризированные критерии устойчивости . . . . .	715
§ 190. Применение линеаризированных уравнений к задаче выпучивания . . . . .	719
§ 191. Линеаризованные уравнения ползучести с упрочнением . . . . .	722
§ 192. Выпучивание пластин по линеаризованной теории . . . . .	724
<b>Библиография . . . . .</b>	<b>727</b>
<b>Указатель имен . . . . .</b>	<b>743</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>745</b>