

И. И. Аргатов



**Введение
в асимптотическое
моделирование
в механике**



ЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ



И. И. Аргатов

**Введение
в асимптотическое
моделирование
в механике**



**ПОЛИТЕХНИКА
ИЗДАТЕЛЬСТВО**
Санкт-Петербург 2004

УДК 539.3
ББК 22.25
А79

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор *Р. Г. Баранцев* (Санкт-Петербургский государственный университет);

доктор физ.-мат. наук, профессор *Д. А. Индейцев* (Институт проблем машиноведения РАН);

кафедра теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета (зав. кафедрой доктор физ.-мат. наук, профессор *П. Е. Товстик*)

*Представлено к изданию
математико-механическим факультетом
Санкт-Петербургского государственного университета*

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Министерства промышленности, науки и технологий РФ
(Грант Президента Российской Федерации МД-182.2003.01)

Аргатов И. И.

А79 Введение в асимптотическое моделирование в механике: Учебное пособие. — СПб.: Политехника, 2004. — 302 с.: ил. 28, библи. 281 назв. ISBN 5-7325-0824-4

Из многочисленных асимптотических методов достаточно подробно и большей частью на конкретных примерах излагаются методы Ляпунова — Пуанкаре и Крылова — Боголюбова решения задач теории колебаний, метод Бахвалова усреднения задач теплопроводности в периодических структурах, метод Вишика — Люстерника для задач с малым параметром при старших производных, алгоритм построения асимптотики решения эллиптических краевых задач в тонких и узких областях (на примере оператора Лапласа и без детального изучения пограничных слоев), метод сращиваемых асимптотических разложений.

Для преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов университетов и вузов, интересующихся асимптотическими методами.

УДК 539.3
ББК 22.25

ISBN 5-7325-0824-4

© И. И. Аргатов, 2004

© Издательство «Политехника», 2004

Оглавление

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Асимптотические модели нелинейных колебаний	7
1.1. Введение. Линейные колебания	—
1.1.1. Колебательные явления	—
1.1.2. Свободные колебания в среде без сопротивления	8
1.1.3. Свободные колебания в среде с сопротивлением	9
1.1.4. Вынужденные колебания. Случай синусоидальной возмущающей силы	10
1.1.5. Вынужденные колебания в среде без сопротивления.	11
1.1.6. Метод возмущений. Прямое разложение.	13
1.2. Метод Ляпунова — Пуанкаре	15
1.2.1. Свободные незатухающие колебания	—
1.2.2. Уравнение Дюффинга. Прямое разложение	16
1.2.3. Теорема Ляпунова	18
1.2.4. Метод Ляпунова	21
1.2.5. Уравнение Дюффинга. Метод Пуанкаре.	25
1.2.6. Метод Пуанкаре. Квазилинейные незатухающие колебания	28
1.3. Метод двухмасштабных разложений	31
1.3.1. Свободные затухающие колебания	—
1.3.2. Линейный осциллятор с малым затуханием	32
1.3.3. Теорема Ньютона	36
1.4. Метод Ван-дер-Поля	40
1.4.1. Автоколебания	—
1.4.2. Переменные Ван-дер-Поля	—
1.4.3. Укороченные уравнения Ван-дер-Поля	42
1.4.4. Стационарные режимы	43
1.5. Метод Крылова — Боголюбова.	45
1.5.1. Переменные Крылова — Боголюбова	—
1.5.2. Метод Крылова — Боголюбова	46
1.5.3. Уравнения первого приближения.	50
1.5.4. Эквивалентная линеаризация нелинейных колебатель- ных систем	52

1.5.5.	Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.	54
1.6.	Метод сращиваемых разложений	58
1.6.1.	Осциллятор с малой массой. Система с $1/2$ степенью свободы	—
1.6.2.	Метод сращиваемых разложений.	59
1.6.3.	Асимптотическая модель механической системы с $1/2$ степенью свободы	63
Глава 2.	Асимптотическое моделирование в теории теплопроводности	65
2.1.	Введение. Задачи теплопроводности	—
2.1.1.	Уравнение теплопроводности	—
2.1.2.	Постановка граничных задач	67
2.1.3.	Фундаментальное решение уравнения Лапласа и функция Грина	68
2.1.4.	Метод разделения переменных.	71
2.1.5.	Гармонические радиусы плоской фигуры	73
2.1.6.	Теория регулярного теплового режима	75
2.2.	Регулярное возмущение границы	78
2.2.1.	Внешний конформный радиус почти круговой области. Формулы типа Рэлея для первой и второй вариаций.	—
2.2.2.	Изменение функции Грина с изменением области. Формула Адамара.	80
2.2.3.	Метод разделения переменных в случае границы, отличной от круговой	82
2.3.	Осреднение процесса теплопроводности в слоистых средах.	85
2.3.1.	Применение метода многих масштабов	—
2.3.2.	Применение метода осреднения	87
2.3.3.	Эффективный коэффициент теплопроводности	88
2.3.4.	Метод Бахвалова	89
2.4.	Осреднение процесса теплопроводности в композите	94
2.4.1.	Постановка задачи.	—
2.4.2.	Асимптотика решения	95
2.4.3.	Осредненная задача	97
2.4.4.	Осреднение процесса теплопроводности в периодической пористой среде	99
2.4.5.	Симметрия эффективных коэффициентов теплопроводности	102
2.5.	Осреднение границы в теории теплопроводности	103
2.5.1.	Постановка задачи.	—
2.5.2.	Задача для пограничного слоя.	104
2.5.3.	Осредненное граничное условие	106

2.6.	Асимптотическое моделирование теплопроводности в тонком стержне	108
2.6.1.	Квазидвумерная теплопроводность в тонком стержне	—
2.6.2.	Анизотропный случай	110
2.7.	Асимптотическое моделирование теплопроводности в тонкой пластине	114
2.7.1.	Квазидвумерная теплопроводность в тонкой пластине	—
2.7.2.	Анизотропный случай	117
2.8.	Метод срачиваемых разложений	121
2.8.1.	Постановка задачи теплопроводности в области с малым включением	—
2.8.2.	Первая и вторая предельные задачи	122
2.8.3.	Главные члены асимптотики	124
2.8.4.	Определение калибровочных последовательностей	125
2.8.5.	Асимптотическая модель теплопроводности в плоской области с высокотеплопроводными включениями малого диаметра	127
Глава 3.	Асимптотические модели деформации упругих мембран и пластинок	131
3.1.	Введение	—
3.1.1.	Задача о деформации упругой мембраны	—
3.1.2.	Контактная задача для упругой мембраны	133
3.1.3.	Статическая задача оптимального управления для упругой мембраны	134
3.2.	Метод Вишика — Люстерника	137
3.2.1.	Первый итерационный процесс	—
3.2.2.	Функции типа пограничного слоя и второй итерационный процесс	138
3.2.3.	Внутренний пограничный слой	140
3.2.4.	Вдавливание твердого тела в мембрану на жестком упругом основании	141
3.2.5.	Изгиб неабсолютно гибкой мембраны	143
3.2.6.	Асимптотика интеграла энергии в задаче с малым параметром при старших производных	146
3.3.	Деформация упругой мембраны, армированной нитями	148
3.3.1.	Постановка задачи	—
3.3.2.	Применение метода осреднения	149
3.3.3.	Осредненная задача	151
3.4.	Защемление упругой пластинки во внутренней точке	152
3.4.1.	Постановка задачи	—
3.4.2.	Внешнее асимптотическое представление	154
3.4.3.	Внутреннее асимптотическое представление	156

3.4.4.	Сращивание внешнего и внутреннего асимптотических представлений	157
3.4.5.	Выражение величин $N_k^{(i)}$ через коэффициенты комплексных потенциалов	158
3.5.	Деформация мембраны над квазиточечными опорами.	161
3.5.1.	Постановка задачи.	—
3.5.2.	Асимптотика решения	162
3.5.3.	Асимптотическая модель деформации мембраны над квазиточечными опорами.	164
3.6.	Улучшенная процедура сращивания асимптотических разложений.	165
3.6.1.	Обобщенные функции Грина для задачи Дирихле.	—
3.6.2.	Обобщенные функции Грина для внешней задачи Дирихле с полюсом на бесконечности	168
3.6.3.	Внешнее и внутреннее асимптотические представления	170
3.6.4.	Сращивание внешнего и внутреннего асимптотических представлений	171
3.6.5.	Матрицы поляризации для первой и второй предельных задач	173
3.6.6.	Решение результирующей системы линейных алгебраических уравнений.	176
3.6.7.	Модификация улучшенной процедуры сращивания	177
3.7.	Давление твердого тела на мембрану.	179
3.7.1.	Постановка задачи.	—
3.7.2.	Внешнее и внутреннее асимптотические представления	181
3.7.3.	Уравнение, связывающее перемещение штампа с действующей на него силой	182
3.7.4.	Моменты системы нагрузок, удерживающей штамп в вертикальном положении	184
3.7.5.	Уточнение конструкции асимптотики	186
3.8.	Давление абсолютно твердого тела на упругую пластинку	188
3.8.1.	Постановка задачи.	—
3.8.2.	Внешнее и внутреннее асимптотические представления	189
3.8.3.	Моменты, действующие на штамп	192
3.8.4.	Зависимость перемещения штампа от действующей на него силы	194
3.9.	Оптимальное управление квазиточечными воздействиями	196
3.9.1.	Постановка задачи.	—
3.9.2.	Конструкция асимптотики	197
3.9.3.	Условие оптимальности.	200

Глава 4. Асимптотическое моделирование в задачах теории упругости	201
4.1. Интегральные характеристики жестких включений и полостей в плоской теории упругости	—
4.1.1. Матрицы поляризации и емкости Винера	—
4.1.2. Выражение компонент матриц упругой поляризации и емкости Винера через коэффициенты комплексных потенциалов	203
4.1.3. Применение конформного преобразования	205
4.1.4. Примеры.	207
4.1.5. Матрица Робена.	210
4.2. Асимптотическое моделирование сосредоточенных сил в плоской теории упругости	212
4.2.1. Введение.	—
4.2.2. Передача нагрузки упругой пластинке через абсолютно жесткое включение	213
4.2.3. Взаимодействие включений	216
4.2.4. Асимптотическое моделирование сосредоточенных сил.	217
4.3. Асимптотическое моделирование равновесия упругого тела на нескольких малых опорах	218
4.3.1. Постановка задачи.	—
4.3.2. Конструкция асимптотики	220
4.3.3. Решение модельной задачи Синьорини	223
4.3.4. Уточненная асимптотическая модель	225
4.4. Асимптотическое моделирование реальных трещин в плоской теории упругости	226
4.4.1. Введение.	—
4.4.2. Постановка задачи асимптотического моделирования реальных трещин	230
4.4.3. Асимптотическое решение задачи об одноосном растяжении упругой плоскости с узким вырезом	232
4.4.4. Условия хрупкого разрушения упругой плоскости, ослабленной узким вырезом.	235
4.5. Давление на границу упругого полупространства узкого кольцевого штампа	237
4.5.1. Постановка контактной задачи.	—
4.5.2. Конструкция асимптотики	238
4.5.3. Уравнение для определения плотности погонных контактных давлений	241
4.5.4. Применение конформного преобразования для записи разрешающего уравнения	243
4.5.5. Приближенное решение разрешающего интегрального уравнения	245
4.5.6. Кольцевой штамп с плоским основанием	248
4.5.7. Логарифмическая асимптотика	250

4.6.	Асимптотическая модель равновесия упругого тела на пронизывающих его тонких упругих стержнях	251
4.6.1.	Постановка задачи	—
4.6.2.	Расчет стержней	252
4.6.3.	Поле упругих перемещений тела вдали от стержней	253
4.6.4.	Поле упругих перемещений тела вблизи от стержней	255
4.6.5.	Поведение внешнего асимптотического представления около стержней	256
4.6.6.	Сращивание внешнего и внутренних асимптотических представлений	257
4.6.7.	Результирующая задача	—
4.6.8.	О решении результирующей задачи	258
4.7.	Кручение тонкостенных стержней	260
4.7.1.	Введение	—
4.7.2.	Кручение призматического стержня с удлиненным профилем	261
4.7.3.	Жесткость на кручение тонкостенного стержня с криволинейным открытым профилем	265
4.7.4.	Жесткость на кручение тонкостенных стержней с замкнутым профилем	270
4.7.5.	Оптимизация жесткости тонкостенного стержня замкнутого профиля	274
	Примечания	282
	Литература	285