

А. П. Исаев, В. А. Рубаков

ТЕОРИЯ ГРУПП и СИММЕТРИЙ

2

Представления групп Ли
и алгебр Ли

■
Приложения



URSS

А. П. Исаев, В. А. Рубаков

ТЕОРИЯ ГРУПП И СИММЕТРИЙ

Книга 2

**Представления групп Ли
и алгебр Ли**

•

Приложения



URSS

МОСКВА

ББК 22.144 22.145* 22.151 22.311



*Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект № 20–12–00007), не подлежит продаже*

**Исаев Алексей Петрович,
Рубаков Валерий Анатольевич**

**Теория групп и симметрий. Кн. 2: Представления групп Ли и алгебр Ли.
Приложения. — М.: КРАСАНД, 2020. — 704 с.**

Излагаются основы теории представлений групп Ли и алгебр Ли. Дана классификация конечномерных комплексных представлений простых алгебр Ли на основе теории весов. Подробно рассматривается теория конечномерных представлений групп и алгебр Ли классических серий. Обсуждаются спинорные представления ортогональных алгебр Ли и спинорных групп Ли.

Для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов, специализирующихся в области теоретической и математической физики.

Издательство «КРАСАНД».

117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.

Формат 60×90/16. Тираж 300 экз. Печ. л. 44. Зак. № 992.

Отпечатано в АО «Областная типография «Печатный двор».

432049, Ульяновск, ул. Пушкирева, д. 27.

ISBN 978–5–396–01040–6

© КРАСАНД, 2020

30887 ID 272419



9 785396 010406



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Содержание

Предисловие	9
Глава 1. Обозначения Дирака	11
1.1. Бра- и кет-вектора. Координатное и импульсное представление	11
1.2. Представление Фока. Голоморфное и антиголоморфное представления	17
1.3. Алгебра Клиффорда и алгебра свободных фермионов	25
1.3.1. Алгебра Клиффорда	26
1.3.2. Представление Фока для алгебры свободных фермионов	31
1.3.3. Алгебра Грассмана	35
Глава 2. Конечномерные представления алгебр Ли $su(2)$ и $sl(2, \mathbb{C})$ и групп Ли $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$	43
2.1. Конечномерные представления алгебр Ли $su(2)$ и $sl(2, \mathbb{C})$	43
2.2. Дифференциальная реализация алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ и представления со старшим весом	52
2.2.1. Реализация алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ с помощью дифференциальных операторов	52
2.2.2. Построение представлений со старшим весом для дифференциальных реализаций $sl(2, \mathbb{C})$	58
2.2.3. Когерентные состояния для алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$	63
2.3. Конечномерные представления групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$	70
2.3.1. Параметризации группы $SU(2)$	70
2.3.2. Конечномерные представления групп $SU(2)$, $SL(2, \mathbb{C})$ и $SO(3)$. Тензорные представления. Функции Вигнера	75
2.3.3. Сферические функции на $S^2 = SU(2)/U(1)$. Операторы Лапласа на $SU(2)$ и $SU(2)/U(1)$	86

2.4. Тензорное произведение представлений группы $SU(2)$ и ряд Клебша—Гордана	96
2.4.1. Разложение Клебша—Гордана	96
2.4.2. Выделение неприводимых представлений со старшим весом в прямом произведении представлений	101
2.4.3. Спиновая цепочка Гейзенберга	112
2.4.4. Метод вычисления коэффициентов Клебша—Гордана	117
2.4.5. Свойства коэффициентов Клебша—Гордана и 3- j символов	124
2.5. Тензорные операторы и $3n$ - j символы	129
2.5.1. Тензорные операторы и теорема Вигнера—Эккарта	129
2.5.2. Коэффициенты Рака и $3n$ - j символы	134
2.5.3. 6- j символы и ассоциативность произведения представлений	143
2.5.4. Вычисление 6- j символов. Метод Швингера	157
Глава 3. Представления простых алгебр Ли.	
Теория весов	169
3.1. Корневые системы простых алгебр Ли	169
3.1.1. Корневые системы алгебр Ли $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$	169
3.1.2. Корневые системы исключительных алгебр Ли	178
3.1.3. Группа Вейля. Дуальные корневые системы	184
3.2. Представления и веса	193
3.3. Решетки весов	205
3.4. Классификация неприводимых конечномерных представлений	212
3.4.1. Представления со старшим весом	212
3.4.2. Фундаментальные веса и классификация представлений алгебр Ли $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$	223
3.4.3. Квадратичный оператор Казимира	246
3.5. Формула Вейля для характеров представлений компактных простых групп Ли	250
3.5.1. Знаменатель Вейля и формула Вейля для характеров	250
3.5.2. Приложения. Явные формулы для характеров и размерностей представлений групп $SU(r + 1)$, $SO(n)$ и $USp(2r)$	264

Глава 4. Конечномерные представления алгебр $sl(N, \mathbb{C})$ и $su(N)$ и групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$	275
4.1. Предварительные замечания	276
4.2. Действие группы S_r в пространстве тензорного произведения определяющих представлений	280
4.3. Представления группы перестановок I. Симметризаторы Юнга	290
4.3.1. Таблицы Юнга. Конструкция симметризаторов Юнга	290
4.3.2. Симметризаторы Юнга и идемпотенты. Неприводимые представления группы S_r и их размерности	302
4.4. Конечномерные неприводимые представления групп SU и SL	315
4.4.1. Конечномерные неприводимые представления $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$ в пространствах симметризованных тензоров	315
4.4.2. Размерности неприводимых представлений групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$	324
4.4.3. Ко-определяющее и присоединенное представления групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$	333
4.4.4. Кварки, $SU(3)$ -симметрия и ее нарушение	336
4.5. Представления группы перестановок II. Теория Юнга—Фробениуса	358
4.5.1. Идемпотенты и неприводимые представления ассоциативных алгебр. Разложения Пирса	360
4.5.2. Взаимная ортогональность и полнота симметризаторов Юнга	377
4.5.3. Дуальность Шура—Вейля	389
4.6. Представления группы перестановок III. Подход Вершика—Окунькова	393
4.6.1. Элементы Юциса—Мерфи и сплетающие операторы в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$	393
4.6.2. Идемпотенты и спектр операторов Юциса—Мерфи	399
4.6.3. Раскрашенный граф Юнга и правило ветвления представлений	416
4.6.4. Граф Юнга и индуктивное построение идемпотентов e_α	423
4.6.5. Проекционные операторы и характеры для неприводимых представлений $U(N)$. Симметрические функции	430
4.7. Заключительные замечания. Базис Гельфанда—Цетлина	443

Глава 5. Конечномерные представления групп SO, Sp и алгебр Ли so, sp	449
5.1. Тензорные представления групп $O(N, \mathbb{C})$, $SO(N, \mathbb{C})$ и их подгрупп $O(p, q)$, $SO(p, q)$	449
5.1.1. Псевдоортогональная группа $O(p, q)$ и алгебра Ли $so(p, q)$	450
5.1.2. Тензоры. Тензорные представления групп $O(p, q)$	454
5.1.3. Выделение неприводимых представлений групп $O(p, q)$ и $SO(p, q)$ из представления $T^{\otimes r}$	458
5.1.4. Неприводимые тензорные представления ортогональных групп. Осциллирующие таблицы Юнга	471
5.2. Алгебра Брауэра Br_n и ее представления	478
5.2.1. Алгебра Брауэра Br_n . Элементы Юциса—Мерфи для алгебры Br_n	478
5.2.2. Сплетающие элементы и идемпотенты в алгебре Br_n . Спектр операторов Юциса—Мерфи	486
5.2.3. Осциллирующие таблицы Юнга и их вектора содержаний	491
5.2.4. Осциллирующий граф Юнга для алгебры Br_n	493
5.2.5. Примитивные идемпотенты для алгебры Брауэра и инвариантные проекторы для представлений ортогональных групп	497
5.3. Тензорные представления группы $Sp(2r, \mathbb{C})$ и ее подгрупп $Sp(2r, \mathbb{R})$, $USp(2r)$, $Sp(p, r - p)$	502
5.4. Спинорные представления алгебр Ли $so(N, \mathbb{C})$	510
5.4.1. Спинорные представления алгебр Ли $so(2r, \mathbb{C})$	511
5.4.2. Спинорные представления алгебр Ли $so(2r + 1, \mathbb{C})$	516
Глава 6. Группы $Spin(p, q)$ и их конечномерные представления	521
6.1. Алгебры Клиффорда и их представления	521
6.1.1. Вещественные алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$	522
6.1.2. Матричные представления комплексных алгебр Клиффорда \mathcal{Cl}_N и их вещественных форм $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$	528
6.1.3. Вейлевские представления алгебр Клиффорда \mathcal{Cl}_N и $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$	542
6.2. Спинорные группы $Pin(p, q)$ и $Spin(p, q)$	548
6.2.1. Определения спинорных групп $Pin(p, q)$ и $Spin(p, q)$	548

6.2.2. Представления алгебр Клиффорда, алгебр $\text{spin}(p, q)$ и групп $\text{Spin}(p, q)$	564
6.3. Матрицы сопряжения	569
6.3.1. Матрицы сопряжения B, C, D для представлений алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ и свойства этих матриц	569
6.3.2. Матрицы сопряжения B, C, D и структура групп $\text{Spin}(p, q)$. Группа $\text{Spin}(8)$	585
6.4. Дираковские, вейлевские и майорановские спиноры в пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$	597
6.4.1. Спиноры в пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$ и тензорные произведения спиноров	597
6.4.2. Зарядовое сопряжение спиноров в пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$	605
6.4.3. Алгебра $\mathcal{C}\ell_{(1,N-1)}$ и спинорная группа $\text{Spin}(1, N - 1)$. Спиноры в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,N-1}$	612
6.4.4. Тождества Фирца для многомерных спиноров	618
Глава 7. Решения некоторых задач	629
7.1. Задача 1.3.11	629
7.2. Задача 1.3.12	630
7.3. Задача 2.2.15	631
7.4. Задача 2.3.20	633
7.5. Задача 2.3.22	633
7.6. Задача 2.3.23	634
7.7. Задача 2.3.27	636
7.8. Задача 2.5.48	640
7.9. Задача 2.5.59	642
7.10. Задача 3.3.7	643
7.11. Задача 3.4.13	648
7.12. Задачи 4.3.6, 4.3.7	649
7.13. Задача 4.3.14	652
7.14. Задача 4.3.15	655
7.15. Задача 4.5.40	656
7.16. Задача 4.6.52	657
7.17. Задача 4.6.54	658
7.18. Задача 4.7.58	660
7.19. Задача 5.1.3	663

7.20. Задача 5.1.5	666
7.21. Задача 5.3.17	669
7.22. Задача 6.2.14	671
7.23. Задача 6.2.16	672
7.24. Задача 6.3.26	673
7.25. Задача 6.3.27	675
7.26. Задача 6.3.31	675
7.27. Задача 6.4.35	676
7.28. Задача 6.4.45	677
Монографии и обзоры общего характера	681
Литература	683
Предметный указатель	689