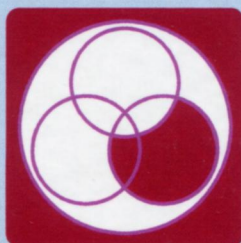


**С.С. Марченков**

# **ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ**



**булева функция**

**конечный автомат**

**машина Тьюринга**

**рекурсивная функция**



**С.С. Марченков**

**ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ  
ДИСКРЕТНОЙ  
МАТЕМАТИКИ**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2023

УДК 519.1(075.8)

ББК 22.17я73

М 30

Марченков С.С. **Избранные главы дискретной математики.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2023. — 192 с. — ISBN 978-5-9221-1969-6.

Учебное пособие написано на основе курсов «Дополнительные главы дискретной математики» и «Функциональные системы», которые автор на протяжении ряда лет читал на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ. Пособие состоит из 6 глав, дополненных задачами и упражнениями. Глава 1 «Множества, отношения, функции» служит теоретико-множественной и алгебраической основой при изучении последующих глав книги. Глава 2 «Замкнутые классы булевых функций» содержит общие факты по булевым функциям, а также современное изложение классических результатов Э. Поста по перечислению всех замкнутых классов булевых функций. Глава 3 «Функции многозначной логики» представляет собой введение в теорию функций многозначной логики. Главы 4 и 5, посвящены конечным автоматам: в главе 4 рассматриваются автоматы-распознаватели, а в главе 5 — автоматы-преобразователи. В главе 6 «Машины Тьюринга и вычислимые функции» определяются машины Тьюринга и функции, вычислимые на них. Устанавливается совпадение класса вычислимых функций с классом частично-рекурсивных функций. Вводятся понятия P-сводимости и NP-полноты. Устанавливается существование NP-полных проблем.

Студентам, аспирантам и научным сотрудникам, специализирующимся в области дискретной математики и кибернетики.

ISBN 978-5-9221-1969-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2023

© С. С. Марченков, 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> . . . . .	5
<b>Глава 1. Множества, отношения, функции</b> . . . . .	7
<b>Глава 2. Замкнутые классы булевых функций</b> . . . . .	16
2.1. Основные понятия . . . . .	16
2.2. Предварительные сведения . . . . .	20
2.3. Замкнутые классы, лежащие в классах $U, D, K, L$ . . . . .	25
2.4. Замкнутые классы, лежащие в классах $S, O^\infty, I^\infty$ . . . . .	28
2.5. Замкнутые классы, лежащие в классах $T_1$ и $T_0$ . . . . .	34
2.6. Основной результат . . . . .	41
<b>Глава 3. Функции многозначной логики</b> . . . . .	46
3.1. Основные понятия . . . . .	46
3.2. Стандартные полные системы . . . . .	47
3.3. Алгоритм распознавания функциональной полноты . . . . .	52
3.4. Теорема Кузнецова о функциональной полноте . . . . .	55
3.5. Критерий Яблонского . . . . .	58
3.6. Замкнутые классы, не имеющие конечных базисов . . . . .	62
3.7. Перечисление предполных классов в $R_k$ . . . . .	65
<b>Глава 4. Конечные автоматы-распознаватели</b> . . . . .	69
4.1. Конечный автомат без выхода. Конечно-автоматные множества . . . . .	69
4.2. Правоинвариантная эквивалентность. Теоретико-множественные операции над конечно-автоматными множествами . . . . .	73
4.3. Недетерминированные автоматы . . . . .	78
4.4. Операции произведения и итерации . . . . .	81
4.5. Регулярные множества. Теорема Клини . . . . .	84
<b>Глава 5. Конечные автоматы-преобразователи</b> . . . . .	88
5.1. Конечный автомат с выходом. Теорема Мура . . . . .	88
5.2. Остаточные функции. Вес функции . . . . .	92
5.3. Конечные автоматы на сверхсловах . . . . .	95
5.4. Операции суперпозиции и введения обратной связи . . . . .	101

---

5.5. Конечная порождаемость класса конечно-автоматных функций. Несводимость операции введения обратной связи к операции суперпозиции . . . . .	105
<b>Глава 6. Машины Тьюринга и вычислимые функции . . . . .</b>	<b>110</b>
6.1. Машина Тьюринга . . . . .	110
6.2. Композиция и итерация машин Тьюринга . . . . .	115
6.3. Моделирование машин Тьюринга . . . . .	120
6.4. Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации . . . . .	122
6.5. Универсальная машина Тьюринга . . . . .	129
6.6. Классы P и NP . . . . .	134
6.7. NP-полнота. Теорема Кука . . . . .	140
6.8. Примитивно-рекурсивные функции . . . . .	148
6.9. Класс частично-рекурсивных функций . . . . .	154
6.10. Частичная рекурсивность вычислимых функций. Формула Клини . . . . .	161
<b>Ответы, решения, указания . . . . .</b>	<b>164</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>182</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>184</b>