

С.П. Тимошенко  
Дж. Гудьер

ТЕОРИЯ  
УПРУГОСТИ

*С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер*

# ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Перевод с английского  
М. И. Рейтмана

Под редакцией  
Г. С. Шапиро



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва 1975

**Теория упругости**, перев. с англ., Тимошенко С. П., Гудьер Дж., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1975 г., стр. 576.

В книге дано систематическое изложение теории упругости, начиная с вывода основных соотношений и кончая некоторыми решениями, полученными в недавние годы. Подробно рассмотрены плоская задача, задачи кручения и концентрации напряжений, некоторые пространственные задачи, вариационные принципы и методы решения задач. Излагаются также задачи распространения волн в упругой среде. В авторском приложении к книге, которого не было в прежних изданиях, описан метод конечных разностей для решения плоской задачи, а в приложении, написанном переводчиком к русскому изданию, изложен метод конечных элементов.

Для чтения книги не требуется математических знаний сверх программы технического вуза. Все решаемые задачи представляют интерес для практики инженерных расчетов и доведены до конечных формул.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов и студентов, а также для инженеров-проектировщиков, занимающихся расчетами на прочность.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода . . . . .	9
Предисловие к третьему изданию . . . . .	12
Предисловие ко второму изданию . . . . .	14
Предисловие к первому изданию . . . . .	15
Обозначения . . . . .	19
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>21</b>
§ 1. Упругость . . . . .	21
§ 2. Напряжения . . . . .	22
§ 3. Обозначения для сил и напряжений . . . . .	23
§ 4. Компоненты напряжений . . . . .	24
§ 5. Компоненты деформаций . . . . .	25
§ 6. Закон Гука . . . . .	27
§ 7. Индексные обозначения . . . . .	31
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>Глава 2. Плоское напряженное состояние и плоская деформация . . . . .</b>	<b>34</b>
§ 8. Плоское напряженное состояние . . . . .	34
§ 9. Плоская деформация . . . . .	34
§ 10. Напряжения в точке . . . . .	36
§ 11. Деформации в точке . . . . .	41
§ 12. Измерение поверхностных деформаций . . . . .	43
§ 13. Построение круга деформаций Мора для розетки . . . . .	45
§ 14. Дифференциальные уравнения равновесия . . . . .	45
§ 15. Граничные условия . . . . .	46
§ 16. Уравнения совместности . . . . .	47
§ 17. Функция напряжений . . . . .	49
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>Глава 3. Двумерные задачи в прямоугольных координатах . . . . .</b>	<b>53</b>
§ 18. Решение в полиномах . . . . .	53
§ 19. Концевые эффекты. Принцип Сен-Венана . . . . .	57
§ 20. Определение перемещений . . . . .	58
§ 21. Изгиб консоли, нагруженной на конце . . . . .	59
§ 22. Изгиб балки равномерной нагрузкой . . . . .	63
§ 23. Другие случаи балок с непрерывным распределением нагрузки . . . . .	68
§ 24. Решение двумерной задачи при помощи рядов Фурье . . . . .	70
§ 25. Другие приложения рядов Фурье. Нагрузка от собственного веса . . . . .	76
§ 26. Влияние концов. Собственные функции . . . . .	77
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>79</b>

<b>Глава 4. Двумерные задачи в полярных координатах . . . . .</b>	<b>82</b>
§ 27. Общие уравнения в полярных координатах . . . . .	82
§ 28. Полярно-симметричное распределение напряжений . . . . .	85
§ 29. Чистый изгиб кривых брусьев . . . . .	88
§ 30. Компоненты деформаций в полярных координатах . . . . .	92
§ 31. Перемещения при симметричных полях напряжений . . . . .	93
§ 32. Вращающиеся диски . . . . .	96
§ 33. Изгиб кривого бруса силой, приложенной на конце . . . . .	99
§ 34. Краевые дислокации . . . . .	104
§ 35. Влияние круглого отверстия на распределение напряжений в пластинке . . . . .	105
§ 36. Сосредоточенная сила, приложенная в некоторой точке прямолинейной границы . . . . .	112
§ 37. Произвольная вертикальная нагрузка на прямолинейной границе	118
§ 38. Сила, действующая на острие клина . . . . .	124
§ 39. Изгибающий момент, действующий на острие клина . . . . .	126
§ 40. Действие на балку сосредоточенной силы . . . . .	127
§ 41. Напряжения в круглом диске . . . . .	136
§ 42. Сила, действующая в точке бесконечной пластинки . . . . .	140
§ 43. Обобщенное решение двумерной задачи в полярных координатах	145
§ 44. Приложения обобщенного решения в полярных координатах . .	149
§ 45. Клин, нагруженный вдоль граней . . . . .	152
§ 46. Собственные решения для клиньев и вырезов . . . . .	154
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>157</b>
<b>Глава 5. Экспериментальные методы. Метод фотоупругости и метод «муара»</b>	<b>162</b>
§ 47. Экспериментальные методы и проверка теоретических решений	162
§ 48. Измерение напряжений фотоупругим методом . . . . .	162
§ 49. Круговой полярископ . . . . .	168
§ 50. Примеры определения напряжений фотоупругим методом . . . .	170
§ 51. Определение главных напряжений . . . . .	173
§ 52. Методы фотоупругости в трехмерном случае . . . . .	174
§ 53. Метод муара . . . . .	176
<b>Глава 6. Двумерные задачи в криволинейных координатах . . . . .</b>	<b>179</b>
§ 54. Функции комплексного переменного . . . . .	179
§ 55. Аналитические функции и уравнение Лапласа . . . . .	181
§ 56. Функции напряжений, выраженные через гармонические и комплексные функции . . . . .	183
§ 57. Перемещения, отвечающие заданной функции напряжений . . .	185
§ 58. Выражение напряжений и перемещений через комплексные потенциалы . . . . .	187
§ 59. Результирующая напряжений, действующих по некоторой кривой. Граничные условия . . . . .	189
§ 60. Криволинейные координаты . . . . .	192
§ 61. Компоненты напряжений в криволинейных координатах . . . .	195
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>197</b>

§ 62. Решения в эллиптических координатах. Эллиптическое отверстие в пластинке с однородным напряженным состоянием . . . . .	197
§ 63. Эллиптическое отверстие в пластинке, подвергнутой одноосному растяжению . . . . .	201
§ 64. Гиперболические границы. Вырезы . . . . .	205
§ 65. Биполярные координаты . . . . .	207
§ 66. Решения в биполярных координатах . . . . .	208
§ 67. Определение комплексных потенциалов по заданным граничным условиям. Методы Н. И. Мухелишвили . . . . .	213
§ 68. Формулы для комплексных потенциалов . . . . .	216
§ 69. Свойства напряжений и деформаций, отвечающих комплексным потенциалам, аналитическим в области материала, расположенной вокруг отверстия . . . . .	218
§ 70. Теоремы для граничных интегралов . . . . .	220
§ 71. Отображающая функция $\omega(\xi)$ для эллиптического отверстия. Второй граничный интеграл . . . . .	223
§ 72. Эллиптическое отверстие. Формула для $\psi(\zeta)$ . . . . .	224
§ 73. Эллиптическое отверстие. Частные задачи . . . . .	225
<b>Задачи</b> . . . . .	228
<b>Глава 7. Анализ напряжений и деформаций в пространственном случае</b> . . . . .	229
§ 74. Введение . . . . .	229
§ 75. Главные напряжения . . . . .	231
§ 76. Эллипсоид напряжений и направляющая поверхность напряжений . . . . .	232
§ 77. Определение главных напряжений . . . . .	233
§ 78. Инварианты напряжений . . . . .	234
§ 79. Определение максимального касательного напряжения . . . . .	235
§ 80. Однородная деформация . . . . .	237
§ 81. Деформации в точке тела . . . . .	238
§ 82. Главные оси деформаций . . . . .	241
§ 83. Вращение . . . . .	242
<b>Задачи</b> . . . . .	244
<b>Глава 8. Общие теоремы</b> . . . . .	245
§ 84. Дифференциальные уравнения равновесия . . . . .	245
§ 85. Условия совместности . . . . .	246
§ 86. Определение перемещений . . . . .	249
§ 87. Уравнения равновесия в перемещениях . . . . .	250
§ 88. Общее решение для перемещений . . . . .	251
§ 89. Принцип суперпозиции . . . . .	252
§ 90. Энергия деформации . . . . .	253
§ 91. Энергия деформации для краевой дислокации . . . . .	258
§ 92. Принцип виртуальной работы . . . . .	260
§ 93. Теорема Кастильяно . . . . .	265
§ 94. Приложения принципа минимальной работы. Прямоугольные пластинки . . . . .	269
§ 95. Эффективная ширина широких полок балок . . . . .	272
<b>Задачи</b> . . . . .	278

§ 96. Единственность решения . . . . .	279
§ 97. Теорема взаимности . . . . .	281
§ 98. Приближенный характер решений для плоского напряженного состояния . . . . .	284
Задачи . . . . .	286
<b>Глава 9. Элементарные трехмерные задачи теории упругости . . . . .</b>	<b>288</b>
§ 99. Однородное напряженное состояние . . . . .	288
§ 100. Растяжение призматического стержня под действием собственного веса . . . . .	289
§ 101. Кручение круглых валов постоянного поперечного сечения . . . . .	292
§ 102. Чистый изгиб призматических стержней . . . . .	293
§ 103. Чистый изгиб пластинок . . . . .	297
<b>Глава 10. Кручение . . . . .</b>	<b>299</b>
§ 104. Кручение прямолинейных стержней . . . . .	299
§ 105. Эллиптическое поперечное сечение . . . . .	304
§ 106. Другие элементарные решения . . . . .	306
§ 107. Мембранная аналогия . . . . .	309
§ 108. Кручение стержня узкого прямоугольного поперечного сечения . . . . .	313
§ 109. Кручение прямоугольных стержней . . . . .	316
§ 110. Дополнительные результаты . . . . .	319
§ 111. Решение задач о кручении энергетическим методом . . . . .	322
§ 112. Кручение стержней прокатных профилей . . . . .	328
§ 113. Экспериментальные аналогии . . . . .	330
§ 114. Гидродинамические аналогии . . . . .	331
§ 115. Кручение полых валов . . . . .	334
§ 116. Кручение тонкостенных труб . . . . .	338
§ 117. Винтовые дислокации . . . . .	342
§ 118. Кручение стержня, одно из поперечных сечений которого остается плоским . . . . .	344
§ 119. Кручение круглых валов переменного диаметра . . . . .	346
Задачи . . . . .	354
<b>Глава 11. Изгиб брусьев . . . . .</b>	<b>358</b>
§ 120. Изгиб консоли . . . . .	358
§ 121. Функция напряжений . . . . .	360
§ 122. Круглое поперечное сечение . . . . .	362
§ 123. Эллиптическое поперечное сечение . . . . .	363
§ 124. Прямоугольное поперечное сечение . . . . .	364
§ 125. Дополнительные результаты . . . . .	370
§ 126. Несимметричные поперечные сечения . . . . .	372
§ 127. Центр изгиба . . . . .	374
§ 128. Решение задач изгиба с помощью метода мыльной пленки . . . . .	377
§ 129. Перемещения . . . . .	380
§ 130. Дальнейшие исследования изгиба брусьев . . . . .	381

§ 162. Решения общих уравнений. Термоупругий потенциал перемещения . . . . .	480
§ 163. Общая двумерная задача для круговых областей . . . . .	484
§ 164. Общая двумерная задача. Решение в комплексных потенциалах	486
<b>Глава 14. Распространение волн в упругой сплошной среде . . . . .</b>	<b>489</b>
§ 165. Введение . . . . .	489
§ 166. Волны расширения и волны искажения в изотропной упругой среде . . . . .	490
§ 167. Плоские волны . . . . .	491
§ 168. Продольные волны в стержнях постоянного сечения. Элементарная теория . . . . .	496
§ 169. Продольное соударение стержней . . . . .	501
§ 170. Поверхностные волны Рэлея . . . . .	509
§ 171. Волны со сферической симметрией в бесконечной среде . . . . .	512
§ 172. Взрывное давление в сферической полости . . . . .	513
<b>Приложение I. Применение конечно-разностных уравнений в теории упругости . . . . .</b>	<b>517</b>
§ 1. Вывод конечно-разностных уравнений . . . . .	517
§ 2. Методы последовательных приближений . . . . .	521
§ 3. Метод релаксации . . . . .	524
§ 4. Треугольные и шестиугольные сетки . . . . .	529
§ 5. Блочная и групповая релаксации . . . . .	534
§ 6. Кручение стержней с многосвязными поперечными сечениями	535
§ 7. Точки, расположенные вблизи границы . . . . .	537
§ 8. Бигармоническое уравнение . . . . .	539
§ 9. Кручение круглых валов переменного диаметра . . . . .	547
§ 10. Решение задач с помощью ЭВМ . . . . .	550
<b>Приложение II. Метод конечных элементов . . . . .</b>	<b>552</b>
§ 1. Векторы и матрицы . . . . .	552
§ 2. Треугольные конечные элементы в плоской задаче теории упругости . . . . .	555
§ 3. Пример использования треугольных конечных элементов. Пластина под действием сосредоточенных сил . . . . .	560
§ 4. Повышение порядка аппроксимации . . . . .	561
§ 5. Трехмерные задачи . . . . .	564
Именной указатель . . . . .	567
Предметный указатель . . . . .	572