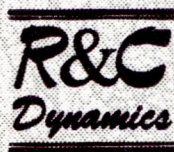


В. В. Васин, И. И. Еремин

ОПЕРАТОРЫ И ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ФЕЙЕРОВСКОГО ТИПА

ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ



В. В. ВАСИН, И. И. ЕРЕМИН

ОПЕРАТОРЫ И ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ФЕЙЕРОВСКОГО ТИПА

ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ



Москва ♦ Ижевск

2005

УДК 519.6 + 517.988.68



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №05-01-14036.

Васин В. В., Еремин И. И.

Операторы и итерационные процессы фейеровского типа (теория и приложения). Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. — 200 с.

В книге дано систематическое изложение конструктивных итерационных методов решения некоторых классов задач, порождаемых операторами фейеровского (квазисжимающего) типа. Круг исследуемых проблем включает линейные и нелинейные некорректные задачи (операторные уравнения первого рода) с априорными ограничениями, системы линейных и выпуклых неравенств, собственные и несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.

Монография предназначена широкому кругу читателей: студентам и аспирантам физико-математических, экономических и технических специальностей, инженерам-исследователям, интересующимся технологией решения прикладных проблем.

Ответственный редактор:

доктор физико-математических наук **Л. Д. Попов**

ISBN 5-93972-427-2

© В. В. Васин, И. И. Еремин, 2005

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005

<http://rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Предисловие	8
Введение	14
ГЛАВА I. Общие свойства нелинейных операторов фей- еровского типа	16
§ 1. Основные классы нелинейных отображений	16
1.1. (Квази)нерастягивающие и псевдосжимающие операторы	16
1.2. Структура множества неподвижных точек	22
1.3. Существование неподвижных точек	23
§ 2. Сильная сходимость итераций для квазинерастяги- вающих операторов	24
2.1. Случай демикомпактных операторов	25
2.2. Случай линейного оператора	26
2.3. Итерационные процессы для линейных уравне- ний первого рода	28
§ 3. Свойства итераций для псевдосжимающих отобра- жений	32
3.1. Основная теорема сходимости итераций	32
3.2. Суперпозиции псевдосжимающих операторов	36
3.3. Примеры псевдосжимающих операторов	38
§ 4. Итерации с корректирующими множителями	44
4.1. Устойчивость неподвижных точек по параметру	45
4.2. Одноступенчатый итерационный процесс	47
4.3. Асимптотическое правило останова итераций	50
§ 5. Фейеровские отображения и последовательности	51
5.1. Определения и общие свойства	51

5.2. Примеры фейеровских отображений	55
5.3. Слабо фейеровские отображения и последовательности	57
§ 6. Теоремы о сходимости фейеровских процессов	58
6.1. Случай однозначного оператора	58
6.2. Случай многозначных фейеровских отображений	60
§ 7. M -Разделяющие пары и M -фейеровские отображения	63

ГЛАВА II. Приложения итерационных процессов к нелинейным уравнениям

§ 1. Градиентные методы	67
§ 2. Метод Ньютона–Канторовича	70
§ 3. Фейеровские процессы для смешанных задач	72
3.1. Системы нелинейных уравнений и выпуклых неравенств	72
3.2. Линейный случай	74
§ 4. Нелинейные процессы для линейных операторных уравнений	75
4.1. Итерационные α -процессы и экстремальные принципы	75
4.2. Неравенство для моментов и псевдосжимаемость оператора шага	78
4.3. Сходимость α -процессов	80
§ 5. Линеаризованные варианты градиентных методов . .	81
5.1. Метод наискорейшего спуска	81
5.2. Линеаризованный аналог метода минимальной ошибки	84
5.3. Выводы и приложения	85
§ 6. Метод Левенберга–Марквардта	88
6.1. Идея метода	88
6.2. Слабая сходимость метода	89
6.3. Сильная сходимость модифицированного метода. Асимптотическое правило останова	91
6.4. Останов итераций по невязке	94
§ 7. Некорректные задачи с априорной информацией . .	95

7.1. Постановка задачи и теоремы сходимости	95
7.2. Свойства итераций при возмущенных данных	99
7.3. Учет априорной информации в прикладных задачах	101

ГЛАВА III. Применение фейеровских методов к решению систем линейных и выпуклых неравенств . . . 109

§1. Базовые конструкции M -фейеровских отображений применительно к конечным системам линейных неравенств	109
§2. Фейеровские процессы с переменным коэффициентом релаксации	111
2.1. Основная теорема	112
2.2. Фейеровский процесс с зеркальной релаксацией	114
§3. Фейеровские процессы применительно к системе выпуклых неравенств	116
3.1. Системы неравенств в $\mathbb{R}^n$	116
3.2. Системы неравенств в гильбертовом пространстве	118
§4. Системы выпуклых включений	120
4.1. Общие свойства и конструкции	120
4.2. Совместные системы включений	123
4.3. Сходящиеся процессы для несовместных систем включений	124
4.4. Циклы неподвижности для несовместных систем выпуклых неравенств	127
§5. О скорости сходимости фейеровских процессов	129
§6. Фейеровские методы и негладкая оптимизация	132
6.1. Задача о седловой точке функции Лагранжа	133
6.2. Метод точных штрафных функций	136
6.3. Фейеровские методы применительно к системам выпуклых неравенств и задачам ВП без предположений гладкости	138
6.4. Базовый процесс	141
§7. Вопросы устойчивости фейеровских процессов	144

ГЛАВА IV. Дополнительные вопросы фейеровских отображений и процессов	146
§ 1. Декомпозиция и распараллеливание фейеровских процессов	146
1.1. Схемы распараллеливания	146
1.2. Схемы распараллеливания для задачи линейного программирования	151
§ 2. Рандомизация фейеровских процессов	153
2.1. Общие теоремы о сходимости	154
2.2. Некоторые замечания к реализации процессов	157
§ 3. Фейеровские процессы и противоречивые системы линейных неравенств	159
3.1. Предварительные замечания и сведения	159
3.2. Фейеровский процесс для задачи квадратичной аппроксимации несовместной системы линейных неравенств	162
3.3. Перенесение результатов на случай системы с дополнительными ограничениями	164
§ 4. Фейеровские процессы для нахождения квазирешений несобственных задач линейного программирования (НЗ ЛП)	165
4.1. Базовый аппроксимационно-фейеровский процесс для НЗ ЛП 1-го рода	168
4.2. Аппроксимационно-фейеровский процесс для НЗ ЛП 2-го рода	170
4.3. Фейеровский процесс для НЗ ЛП 3-го рода	171
§ 5. Нормализованные решения систем выпуклых неравенств	173
5.1. Вспомогательные результаты	173
5.2. Теоремы об устойчивости неподвижных точек для квазисжатий	176
5.3. Итерационная процедура для нахождения проекции	181

§ 6. Фейеровские процессы для нахождения аппроксимационных решений несовместных систем линейных и выпуклых неравенств	183
Литература	188
Список обозначений	194
Принятые сокращения	196
Предметный указатель	197